# Espaces vectoriels normés

**Exercice 1:** Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sup_j \sum_i |a_{ij}|$. Montrer que c'est une norme sous-multiplicative (la norme du produit est inférieure au produit des normes).

**Exercice 2:** $E$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $g$ est un élément de $E$. A toute application $f$ de $E$ on associe $N_g(f) = \sup\{|f(x)g(x)|; x \in [0,1]\}$.
1) A quelle condition sur $g$ l'application $N_g$ est-elle une norme ?
2) On suppose que $g$ ne s'annule en aucun point. Comparer $N_g$ avec la norme $N$, définie par $N(f) = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$.
3) Même question si $g$ s'annule au moins en un point.

**Exercice 3:** Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction 1-lipschitzienne. On définit $(x_n)$ par la donnée de $x_0$ dans $[a,b]$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}.$$

Montrer que $(x_n)$ converge vers un point fixe de $f$.

**Exercice 4:** Soit $A$ une partie convexe. Montrer que $x \mapsto d(x,A)$ est convexe.

**Exercice 5:** Dans un espace vectoriel normé, on se donne une partie $A$ convexe. Prouver que l'adhérence de $A$ est convexe.

**Exercice 6:**
1) Montrer que si $A$ est une partie fermée d'un espace vectoriel normé et si $x$ est un élément de $E$ tel que $d(x,A) = 0$ alors $x$ appartient à $A$.
2) Montrer la réciproque : Si $d(x,A) = 0$ implique que $x$ appartient à $A$ alors $A$ est fermée.

**Exercice 7:** Soit $P = (p_{ij}) \in M_p(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j\ p_{i,j} \geq 0$ et $\forall i\ \sum_j p_{i,j} = 1$. On note $P^n = (p_{i,j}^{(n)})$ (puissance $n$-ième de $P$)
1) Montrer que $\forall i,j,n\ p_{i,j}^{(n)} \geq 0$ et $\forall i,n\ \sum_j p_{i,j}^{(n)} = 1$.
2) On suppose qu'il existe $n_0$ tel que $\min_{i,j} p_{i,j}^{(n_0)} = \epsilon > 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$$

(indépendant de $i$) avec $\pi_j > 0$ et $\sum_j \pi_j = 1$.
*Indication :* introduire $m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)}$ ainsi $M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)}$. Montrer que ces deux suites sont monotones. Montrer que $\forall j,n\ m_j^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)}(1-\epsilon) + \epsilon M_j^{(n)}$ et conclure.

**Exercice 8:** Soient $p$ et $q$ des réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1) Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. Montrer $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

2) Soient $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N)$ des réels, montrer que :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra d'abord envisager le cas où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p = 1 = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q$.

3) En déduire que pour tout réels $(a_1, \ldots, a_N)$ :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| ; \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\right\}.$$

4) Soient $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N)$ des réels, montrer que :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Indication :* Utilisez la question précédente.

5) On pose

$$N_p(a_1, \ldots, a_N) = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $N_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de $N_p(a_1, \ldots, a_N)$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 9:** Pour tout segment $[a,b]$, on pose $\phi([a,b]) = [a, \frac{2a+b}{3}] \cup [\frac{a+2b}{3}, b]$. On étend la définition de $\phi$ à une réunion disjointe par $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$. On pose $K_0 = [0,1]$, $K_{n+1} = \phi(K_n)$ et $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1) Donner $K_1$, $K_2$ et $K_3$.

2) De combien d'intervalles $K_n$ est-il composé ?

3) Quelle est la longueur de $K_n$, somme des longueurs des intervalles le composant ?

4) Montrer que $K$ est non vide et contient toutes les extrémités des intervalles des $K_n$.

5) Montrer que $K$ est d'intérieur vide.

6) Montrer que $K$ est sans point isolé, c'est-à-dire que tout voisinage d'un point de $K$ contient au moins un autre point de $K$.

7) On note $N(\epsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes nécessaire pour recouvrir $K$. En encadrant $N(\epsilon)$ montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

existe. On appelle ce nombre la dimension de Hausdorff de $K$ (note [1]).

1. Ceci n'est pas la définition de la dimension de Hausdorff d'un ensemble. Néanmoins si cette limite existe, elle est bien égale à la dimension de Hausdorff de l'ensemble.