**Exercice 1:** Si $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ toute application continue $f$ de $E$ vers $F$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ est linéaire.
*Indication :* Plan : Montrer
- Si $n$ est entier $f(nx) = nf(x)$.
- $f(-x) = -f(x)$
- Si $n$ est dans $\mathbb{Z}$ $f(nx) = nf(x)$.
- Pour $q$ dans $\mathbb{N}^*$ $f(\frac{1}{q}x) = \frac{1}{q}f(x)$.
- Pour $\lambda$ dans $\mathbb{Q}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
- Pour $\lambda$ dans $\mathbb{R}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

**Exercice 2:** Soit $K_n$ une suite décroissante de compacts non vides de $E$. Montrer que $\bigcap K_n$ n'est pas vide. Le résultat est-il valable pour une suite de fermés ?

**Exercice 3:** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles, soit $\sigma = (a = x_0, x_1, \dots, x_p = b)$ une subdivision de $[a,b]$. On note

$$V(\sigma, f, a, b) = \sum_{k=0}^{p-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})|.$$

Si $V(f,a,b) = \sup_\sigma V(\sigma, f, a, b)$ existe on dit que $f$ est à variation bornée.
1) Montrer que toute fonction croissante est à variation bornée.
2) Montrer que toute application lipschitzienne est à variation bornée.
3) Montrer que l'ensemble des fonctions à variation bornées sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel des fonctions bornées.
4) Montrer que si $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ alors pour tout $c$ dans $]a,b[$ $f$ est à variation bornée sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et $V(f,a,b) = V(f,a,c) + V(f,c,b)$.
5) Montrer que si $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ alors $x \mapsto V(f,a,x)$ et $x \mapsto V(f,a,x) - f(x)$ sont croissantes. En déduire que $f$ est à variation bornée si et seulement si elle est la différence de deux fonctions croissantes.

**Exercice 4:** On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
1) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés distincts. Montrer que cette famille est libre.
2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes dont l'ensemble des degrés recouvre $\mathbb{N}$. Prouver que cette famille est génératrice.
Il résulte des deux questions précédentes que si $(P_n)$ est une suite de polynômes telle que pour tout $n$ $P_n$ soit de degré $n$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. On se donne une telle famille. Tout polynôme $Q$ s'écrit de manière unique $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(Q)P_n$, les $a_n(Q)$ étant nuls pour $n$ assez grand. On considère l'application

$$\phi : (Q,R) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} a_n(Q)a_n(R).$$

3) Montrer que $\phi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
4) Que dire de la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace normé associé.
5) Soit $P$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$, en posant $P_i = X^i$ si $i \le \deg P$ et $P_i = X^i - P$ pour $i > \deg P$, montrer qu'il existe une norme $N_P$ sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P$ pour cette norme.

**Exercice 5:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
1) Montrer que $f$ admet en tout point $x$ de $]a, b[$ une limite à gauche, notée $f(x^+)$, et une limite à droite, notée $f(x^+)$, ainsi qu'une limite à gauche en $b$ et une limite à droite en $a$.
2) Si $x < y$ sont deux points de $[a, b]$, classer dans l'ordre croissant les limites à gauche et à droite éventuelles en ces points.
3) Comment caractériser les points de discontinuité de $f$ à l'aide ces limites ?
4) Soit $p$ un entier et $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < b$ des points de discontinuité de $f$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} f(x_k^+) - f(x_k^-) \leq f(b) - f(a).$$

5) En déduire que pour tout entier $n$ non nul l'ensemble

$$E_n = \{x \in ]a, b[, f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n+1}$$

est fini.
6) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est fini ou dénombrable.

**Exercice 6:** Dans $M_n(R)$ on considère l'ensemble $A_p$ des matrices de rang plus grand ou égal à $p$. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ? dense ?

**Exercice 7:** Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \sup\{|P(t)|; t \in [0, 1]\}$. Soit $a$ un réel, étudier la continuité de l'application qui à $P$ associe $P(a)$.

**Exercice 8:** Soit $u : (E, N_E) \to (F, N_F)$ une application linéaire continue.
1) . Justifier l'existence de

$$|||u||| = \min\{k, \forall x \in E \ N_F(u(x)) \leq k N_E(x)\}.$$

On vérifiera qu'il s'agit bien d'un minimum. Ce nombre s'appelle la norme subordonnée de $u$ (relativement aux normes $N_E$ et $N_F$.
2) Montrer que

$$|||u||| = \sup_{x, N_E(x) \leq 1} N_F(u(x)).$$

3) Montrer que $||| \ |||$ est une norme sur $\mathcal{LC}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de $(E, N_E)$ vers $(F, N_F)$.
4) En précisant le contexte, prouver :

$$|||u \circ v||| \leq |||u||| \, |||v|||.$$

**Exercice 9:**
1) Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est dense ou de la forme $a\mathbb{Z}$.
2) En déduire que l'ensemble des périodes d'une fonction continue non constante est de la forme $T\mathbb{Z}$, $T > 0$.
3) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, puis que les ensembles $\{\sin n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.