Séries

Exercice 1: *Un très (très très très) grand classique*

1) On pose $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$. Notons $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. Montrer que $v_n = \frac{a}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \ln u_{n+1} - \ln u_n$ est convergente puis qu'il existe un c non nul tel que $n! \sim c\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

2) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire l'expression de I_{2n} et de I_{2n+1} à l'aide de $n!$ et $(2n)!$.

3) Prouver que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En déduire $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

4) Prouver finalement la formule de Stirling[1] :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad .$$

5) Soit l la limite de $\ln u_n$. Prouver qu'il existe un réel b tel que $l - \ln u_n = \frac{b}{n} + \circ(\frac{1}{n})$.

6) En déduire :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \circ(\frac{1}{n})\right) \quad .$$

Exercice 2: Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

Exercice 3: Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}$$

où (a, b, c) sont des réels strictement positifs.

Exercice 4: Etudier la convergence des séries dont le terme général est

$$\frac{a}{n} - \ln(n+b) + \ln n, \quad \cos 1 - \cos\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \cos\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n} + \beta\sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Exercice 5:

1) Etablir l'inégalité :

$$\sum_{q=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{q}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

2) Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

1. Stirling James. 1692-1770, anglais.Cette formule apparaîtrait à la page 137 de son ouvrage *Methodus differentialis*, daté de 1730.

Exercice 6: Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$.

Exercice 7: Nature des séries :

$$(-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n} \qquad (-1)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e} \right]$$

Exercice 8: On considère la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1) Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme. On pose

$$R_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

2) Donner un équivalent de (R_n).
3) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 9: Nature de la série de terme général $\displaystyle\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$?

Indication : On appliquera le critère de comparaison logarithmique à une série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, en effectuant pour chacun des quotients un développement de la forme $1 + \frac{a}{n} + \circ(\frac{1}{n})$.

Exercice 10: Nature de la série de terme général $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$?

Exercice 11: Nature de la série de terme général $\displaystyle\frac{n^2}{2^n + n}$?

Exercice 12: Nature de la série de terme général $\displaystyle\frac{\cos(\ln n)}{n}$?

Exercice 13: Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs tels que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Montrer que $n u_n$ tend vers 0.

Exercice 14:

Etant donnée une suite (u_n), positive, décroissante et tendant vers zéro, on pose $a_n = n(u_n - u_{n+1})$. Comparer les natures des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$, et, le cas échéant, les sommes de ces séries.

Exercice 15: Nature de la série de terme général (P et Q sont des polynômes) $\displaystyle(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$?

Exercice 16: Nature de la séries de terme général (a un paramètre réel) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{a}{n}\right)$?

Exercice 17: On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n) = 1 - \cos u_n$.

1) Montrer qu'elle converge vers 0.
2) Montrer que u_3 appartient à $[0, k]$ pour un $k < 1$, indépendant de u_0.
3) Montrer que $f([0, k]) \subset [0, k]$.
4) Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}.$$

5) En déduire un encadrement de u_n en fonction de n et k pour $n \geq 3$.
6) Retrouver le résultat de la première question. Que dire de la rapidité de la convergence ?

Exercice 18: *Séries de Bertrand*
On appelle série de Bertrand une série de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}.$$

1) Comparer pour la relation de prépondérance les suites $(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha})_{n\geq 2}$ et $(\frac{1}{n^\gamma})_{n\geq 2}$, en distinguant les cas $\alpha < \gamma$, $\alpha > \gamma$ et $\alpha = \gamma$.
2) En déduire que si $\alpha > 1$ la série diverge, si $\alpha < 1$ la série converge.
3) En comparant avec une intégrale, étudier la convergence de la série lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 19: *La transformation d'Abel*

1) Soit θ un réel dans $]0, 2\pi[$. Calculer

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) \text{ et } C_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

2) Montrer que les suites $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ et $(C_n(\theta))_{n\geq 1}$ sont bornées.
3) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres complexes. Soit, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k a_k = \epsilon_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k.$$

4) En déduire que si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée et si la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels qui tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum_{n\geq 1} \epsilon_n a_n$ est convergente.
5) En déduire que si $\theta \in]0, 2\pi[$, les séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n}$$

sont convergentes.

Exercice 20: *Règle de Raabe-Duhamel*

1) Rappeler les définitions de $(u_n) = \circ(v_n)$ et $(u_n) \sim (v_n)$.

2) On suppose que $(u_n) = 1 + \frac{\alpha}{n} + \circ(\frac{1}{n})$. Montrer que si $\alpha > 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n > 1$, et que si $\alpha < 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n < 1$.

3) On se donne deux suites à termes strictement positifs (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge il en est de même de $\sum_{n\geq 1} u_n$. Et énoncer la contraposée de cette proposition.

On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$, pour un réel α. On s'intéresse à la convergence de cette série. Si β est un réel,on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

4) Prouver qu'il existe un réel γ tel que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \dfrac{\gamma}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$.

5) En vous servant des questions précédentes montrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, et qu'elle diverge si $\alpha < 1$.

6) Montrer que, en exprimant les trois premiers termes du développement asymptotique de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, que les deux suites suivantes vérifient le critère pour $\alpha = 1$: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n \ln^2 n}\right)$. Montrer que les deux séries associées à ces suites ne sont pas de même nature. Que peut-on en conclure ?

On suppose maintenant que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^2})$, pour un réel α, et l'on va essayer de préciser le comportement de (u_n). On choisit $\beta = \alpha$.

7) Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.

8) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\ln w_{n+1} - \ln w_n)$ est convergente et que la suite (w_n) converge vers un réel c non nul.

9) Donner finalement un équivalent de (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

10) Appliquer la méthode à la série de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^p + 1)^n}\, dx$, $p \geq 2$. On établira pour cela une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

11) Avec les mêmes notations que dire de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n I_n$?

Exercice 21: *Développement décimal d'un réel* Soit x un élément de $[0, 1[$. On définit deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$ par $r_0 = x$ puis $a_n = E(10 r_{n-1})$, $r_n = 10 r_{n-1} - a_n$.

1) Montrer que pour tout n $0 \leq r_n < 1$ et $0 \leq a_n \leq 9$.

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge vers x.

3) Réciproquement, soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers vérifiant pour tout n $0 \leq b_n \leq 9$, et telle que de plus pour tout n il existe $p > n$ avec $b_p < 9$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{10^n}$ converge et que si x désigne sa somme alors x appartient à $[0, 1[$ et lorsqu'on calcule les a_n comme ci-dessus on a $a_n = b_n$ pour tout n.