Séries

Tout d'abord deux sujets pour mettre au net des points importants qui n'ont peut-être pas été compris hier.

Exercice 1:
On voudrait montrer que la suite $(\sin(\ln n))_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite.
1) Montrer, en utilisant le théorème des accroissement finis que

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\ln x) - \sin(\ln(E(x)) = 0$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
2) Montrer que $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$, ne possède pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, dans $\mathbb{R}$, en exhibant deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ mais telles que $(\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent pas vers la même limite.
3) En utilisant les résultats des deux questions précédentes montrer que $(\sin(\ln n))_{n\geq 1}$ ne possède pas de limite.
4) Raffiner le raisonnement précédent pour prouver que $\{\sin(\ln n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 2: On pose, pour n entier, $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ étant prolongée par continuité en 0.
1) Montrer que $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + n\pi} du$.
2) En déduire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ existe.
3) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty, x\in\mathbb{R}} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

existe.

Exercice 3: Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$.

Indication : On aura intérêt à introduire $S_p = \displaystyle\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}$, à montrer la convergence de $\sum_{p\geq 1} S_p$ grâce à un développement asymptotique de S_p, puis à en déduire la convergence de la série initiale.

Exercice 4: On considère $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.
1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Indication : Etudier $(\ln u_n)_{n\geq 1}$.
2) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tels que $u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$.

Exercice 5: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda < 0$.
1) Déterminer $\lim \frac{f(n+1)}{f(n)}$.
2) En déduire que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.
3) Montrer que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim f(n) \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

Exercice 6: Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ est convergente.
Indication : Utiliser la technique de l'exercice 1, couplée avec le résultat de l'exercice 2 et un changement de variable.