Suites et séries de fonctions

Exercice 1: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

Exercice 2: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x\in[0,n],\ f_n(x)=0 \text{ si } x\in[n,+\infty[$$

Exercice 3: Etudier les séries de fonctions suivantes en précisant les domaines de convergence simple, normale, uniforme. Dans un deuxième temps étudier la continuité et la dérivabilité de la somme de la série.

1. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin\frac{x}{n^2} - \frac{x}{n^2}$.
2. $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = (\cos x)^n \sin x$.
3. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\arctan nx$.
4. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$. Déterminer les limites de la somme aux bornes de l'intervalle de convergence. Chercher ensuite des équivalents de la somme aux bornes de cet intervalle.
5. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$. Déterminer la limite de la somme en $+\infty$, d'abord sous la forme de la somme d'une série avant de calculer la valeur de cette somme.
6. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (-1)^n x^\alpha e^{-nx}$, $\alpha\in\mathbb{R}^{*+}$. Calculer la somme.
7. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.
8. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n n e^{-nx^2}}{n^2+1}$.

Exercice 4:
1) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[0,1]$. On suppose qu'il existe une fonction g continue en 0,telle que $g(0)=0$ et $\forall n\in[0,1]\|f_n\|\leq g$. On suppose de plus que pour tout $\alpha>0$ la suite des restrictions des f_n à $[0,1]$ converge uniformément vers la restriction d'un fonction f (définie sur $]0,1]$) à $[\alpha,1]$. On pose $f(0)=0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2) Appliquer à la suite de fonctions $f_0(t)=0,\ f_{n+1}(t) = f_n(t)+\frac{1}{2}(t-f_n^2(t))$, définies sur $[0,1]$.

Exercice 5: Soit k un réel positif et (f_n) une suite d'applications k-lipschitziennes d'un segment $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite de fonctions converge simplement vers une fonction f.
1) Montrer que f est k-lipschitzienne, donc continue.
2) Montrer que pour tout $\epsilon>0$ il existe un $\eta>0$ tel que pour tout x de $[a,b]$

$$\forall y\in]x-\eta,x+\eta[\cap[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N} \quad |(f_n(x)-f(x))-(f_n(y)-f(y))|\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

3) En déduire que pour tout $\epsilon>0$ il existe un $\eta>0$ tel que pour tout x de $[a,b]$ il existe un n_0 de $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall y\in]x-\eta,x+\eta[\cap[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq n_0 \quad |f_n(y)-f(y)|\leq\epsilon.$$

4) En déduire que (f_n) converge uniformément vers f.
5) Etablir l'inégalité $\ln(1+x)\leq x$ sur $\mathbb{R}^+$.
6) On pose pour n entier non nul

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Soit $A>0$. Prouver que la suite des restrictions des f_n à $[0,A]$ vérifie les hypothèses des questions précédentes. En déduire que (f_n) converge uniformément sur $[0,A]$ vers exp.

Exercice 6: *Transformation d'Abel et séries de fonctions*
1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une suite convergente de nombres réels et (λ_n) une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
2) Soit (a_n) une suite décroissante et tendant vers zéro. En utilisant une transformation d'Abel, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ si $0<\alpha<\pi$.
3) (moins facile) En minorant $\sum_{k=E(n/2)}^{n} a_k \sin(k\frac{1}{n})$, montrer que si la série converge uniformément sur $[0,2\pi]$ alors (na_n) tend vers 0.
4) (encore moins facile) Etablir la réciproque : si (na_n) tend vers zéro alors $\sum_{n\geq 0} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$.
Indication : Pour majorer $|\sum_{k=p+1}^{q} a_k \sin kx|$, couper à la somme en deux, à l'indice r. Majorer la première somme en utilisant $|\sin x|\leq |x|$, et la seconde en utilisant la transformation d'Abel. Choisir ensuite r en fonction de x pour que les deux majorants soient à-peu-près égaux.

Exercice 7:
1) Montrer que

$$x\mapsto \frac{1}{x}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2-n^2}$$

définit une fonction f sur $D=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Montrer que

$$f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{x-k}.$$

4) En déduire que f est 1 périodique.
5) Montrer de même que f vérifie

$$(E)\qquad \forall x\in D\qquad f(\frac{x}{2})+f(\frac{x+1}{2})=2f(x).$$

6) Montrer qu'au voisinage de 0 on peut écrire $f(x)=\frac{1}{x}+xg(x)$ où g est une fonction continue sur $]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[$.
Indication : Ecrire

$$f(x)=\frac{1}{x}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{k^2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}.$$

7) Préciser la valeur de $g(0)$ sous la forme d'une série.
8) Montrer que la fonction $h: x\mapsto \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ est 1-périodique sur D et vérifie l'équation (E).
9) Montrer qu'au voisinage de 0 on peut écrire

$$h(x)=\frac{1}{x}+ax+\circ(x).$$

10) En déduire que $f-h$ peut être prolongée en une fonction continue F continue sur $\mathbb{R}$, et vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi que $F(0)=0$.
11) Montrer qu'une telle fonction est nécessairement nulle.
Indication : Considérer $M=\max_{[0,1]}F$. Si $M>0$, montrer qu'il existe un x_0 minimal dans $[0,1]$ tel que $F(x_0)=M$. En appliquant (E) en x_0 aboutir à un contradiction.
12) En déduire $f=h$ et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
13) Montrer que $\forall x\in]-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}[\quad \sin\pi x=\pi x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})$.Prouver (par périodicité) que cette formule est vraie sur $\mathbb{R}$.