Suites de fonctions

Exercice 1: Donner un exemple de suite de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge simplement vers une fonction non bornée.

Exercice 2: Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 3: On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}+x^n}.$$

1) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Etudier la convergence uniforme sur $[A,+\infty[$ $(A>1)$,$[-A,A]$ $(A<1)$.
3) Etudier de même le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} f_n$.
4) Etudier le domaine de continuité de $\sum_{n\geq 0} f_n$.
5) Mêmes questions avec $\sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n$.

Exercice 4:
1) Calculer $I(p,q) = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt$, $p \geq 1$, $q \geq 0$ en trouvant une relation entre $I(p,q+1)$ et $I(p,q)$. En déduire la valeur de $I(n,n)$.
2) Ecrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 5: On s'intéresse à la fonction de la variable réelle :

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt^2}}{1+n^2}.$$

1) Préciser son domaine de définition, noté D. Montrer que f est continue sur D.
2) Déterminer $\ell = \lim_{t\to+\infty} f(t)$.
3) Etudier, sans dériver f, les variations de la fonction f. Donner l'allure de son graphe.
4) Donner un équivalent simple de $f(t) - \ell$ au voisinage de $+\infty$.
5) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
6) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D - \{0\} = D'$, et que sur ce domaine f'' s'exprime simplement à l'aide des fonctions

$$g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{-nt^2} \text{ et } h : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2} t^2 e^{-nt^2}.$$

7) Montrer que $\lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$.
8) Montrer que h est en fait définie sur D. En considérant $t \mapsto h(t)+t^2 f(t)$ obtenir la valeur de $\lim_{t\to 0^+} h(t)$.
9) En déduire finalement que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 6: Donner l'exemple de suite de fonctions continues sur $[0,1]$, bornée, dont on ne peut extraire aucune sous-suite convergeant uniformément.

Exercice 7: Etudier la convergence sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\, dt.$$