Séries entières

Exercice 1: Développer en série entière

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Indication : Rechercher une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 2: On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1) Quel est son rayon de convergence ?
2) Quel est son domaine de convergence (dans $\mathbb{C}$) ? On note f la somme de cette série entière.
3) Sur quel domaine (de $\mathbb{C}$) f est-elle continue ?
4) Quel est le plus grand intervalle **ouvert** sur lequel f est dérivable ? Exprimer f'' sur cet intevalle à l'aide des fonctions élémentaires.
5) Soit g une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b[$. On suppose que $\lim_{x\to b^-} g'(x) = +\infty$. Montrer que g n'est pas dérivable en b.
6) Soit $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathbb{R}$ telle que pour tout n $c_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} c_n R^n$ diverge. Montrer que

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = +\infty$$

7) Soit $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathbb{R}$ telle que $(c_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 en décroissant. Montrer que $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ converge uniformément sur $[-R, 0]$.
8) Se servir des deux résultats précédents pour montrer que le plus grand intervalle sur lequel f est dérivable est $[-1,1[$ et que f est $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, sans calculer f'.
9) Exprimer f' puis f à l'aide des fonctions élémentaires sur $]-1,1[$.
10) En déduire la valeur $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.
11) Retrouver le résultat par un calcul direct.
12) Que vaut $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

Exercice 3: Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ à une rayon de convergence au moins égal à 1. On suppose aussi que sa somme f possède une limite l en 1^-.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente de somme l.
2) Montrer que le résultat précédent n'est plus valable lorsqu'on ne suppose plus les a_n positifs.

Exercice 4: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières. On suppose : pour tout n $a_n > 0$; $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$; $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ diverge et finalement $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$.
1) Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$?
2) Montrer $\lim_{x\to R^-} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = l$.
3) En déduire le théorème d'Abel : Si $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ est au moins 1 et

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Indication : Prendre $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ et $a_n = 1$.

Exercice 5: On appelle dérangement d'un ensemble une permutation de cet ensemble qui ne laisse aucun élément invariant. On note D_n le nombre de dérangement d'un ensemble à n éléments. Ainsi $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ par exemple. On convient $D_0 = 1$.
1) Calculer D_3 et D_4.
2) Montrer la relation $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k D_k = n!$.
3) On appelle f la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est au moins 1.
4) Calculer $f(x)$ et en déduire D_n. (On pourra calculer d'abord le produit $e^x f(x)$.)

Exercice 6: On pose $a_0 = 1 = a_1$

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}.$$

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$, on note R son rayon de convergence.
1) Montrer que $a_n \leq n!$, en déduire que R est non nul et en donner une minoration.
2) On note $S(x)$ la somme de cette série entière sur $]-R, R[$. Trouver le lien entre $S'(x)$ et $S^2(x)$.
3) En déduire l'expression de $S(x)$ (on pourra employer le formalisme $S' = \frac{dS}{dx}$ pour résoudre l'équation différentielle).
4) En déduire une majoration de R.

Exercice 7: Posons

$$V(t,x) = \sum_{p,q} v_{p,q} t^p x^q$$

On suppose qu'il existe M et R strictement positifs tels que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad |v_{p,q}| \leq \frac{M}{R^{p+q}}.$$

1) Soit r dans $]0, R[$ Montrer que la série $V(t,x)$ est absolument convergente dans le double disque $d_r = \{(t,x); |t| < r, |x| < r\}$.
2) Montrer qu'il existe une série entière $X(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$, de rayon de convergence non nul, telle que $X'(t) = V(t, X(t))$.