Exercices classiques I

Je rappelle que le but est de répondre correctement aux exercices de votre choix, dans l'ordre que vous voulez, en se limitant le cas échéant aux premières questions. Une question à moitié ou mal abordée ne vaut rien.

Exercice 1: Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède une et une seule solution x_n strictement positive.

Exercice 2: Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des réels positifs alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Indication : Commencer par le cas de réels strictement positifs.

Exercice 3:
1) Rappeler la définition de $O_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 4: Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout i $|m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$ alors elle est inversible.

Exercice 5: Montrer que dans un espace vectoriel normé tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Exercice 6: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Exercice 7: Nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 8: Nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 9: Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, c'est-à-dire l'existence de $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx$ en utilisant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. On considère que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongée par continuité en 0.

Exercice 10: On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que cette suite converge et préciser cette limite.
2) Si ℓ est sa limite, donner un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11: En utilisant la formule du binôme et en faisant apparaître une série de fonctions montrer que pour tout nombre complexe z :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Exercice 12:
1) Enoncer le théorème de Weierstrass sur l'approximation par les polynômes des fonctions.
2) Démontrer ce théorème pour une fonction f continue de $[0, 1]$ vers $\mathbb{C}$.