Intégration

Exercice 1: Soit f une fonction à valeurs réelles positive décroissante, intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Exercice 2: On note E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}$ dont le carré est intégrable sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire l'ensemble des fonctions f telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2$ converge.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
2) Soit f et g deux éléments de E. Montrer que fg est intégrable.
3) Soit f et g deux éléments de E. Prouver $\left(\int_{\mathbb{R}} fg\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g^2\right)$.
Indication : $\forall t\in\mathbb{R}\ \int_{\mathbb{R}} (f+tg)^2 \geq 0$.
4) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ dès que f' est intégrable. Cette condition est-elle nécessaire ? Montrer néanmoins que si f et f' possèdent des limites en $+\infty$ alors la limite de f' est nulle. On admettra le résultat similaire sur $\mathbb{R}^-$.

Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f'' est aussi dans E on voudrait prouver que f' est dans E.
5) Montrer que $x \mapsto \int_0^x ff''$ possède une limite en $+\infty$
6) Montrer que si ff' tend vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f n'est pas dans E.
7) Déduire des deux questions précédentes que $\int_{\mathbb{R}^+} f'^2$ converge, puis que f' est dans E.
8) Déduire de la question précédente que ff' possède une limite en $+\infty$, puis que cette limite est nécessairement nulle.
9) En utilisant sans justification le résultat similaire en $-\infty$ prouver :

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff'' \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3:
1) Soit a un réel strictement positif. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1+a\sin^2 t}$.
Indication : Effectuer le changement de variable $u = \operatorname{cotan} t$.
2) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$, où α est un réel strictement positif.
3) Discuter, suivant les valeur de $\alpha>0$ de l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha\sin^2 t}$.

Exercice 4: *Une application du lemme de Riemann-Lebesgue*
1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.
2) Calculer $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$.
Indication : Calculer $I_{n+1} - I_n$.
3) Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ peut être prolongée à $[0,\pi]$ en une fonction de classe C^1.
4) Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt = 0 \quad .$$

5) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 5: Soient $a>0$ et $f_0 \in C([0,a])$. On pose $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$.
1) Montrer que, pour $n \geq 1$, f_n s'écrit sous la forme

$$f_n(x) = \int_0^x K_n(x,t) f_0(t)\,dt.$$

2) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement et déterminer sa somme.
3) Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact.