

Intégration

Exercice 1: Soit f une fonction à valeurs réelles positive décroissante, intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.

Exercice 2: On note E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur \mathbb{R} dont le carré est intégrable sur \mathbb{R} . C'est-à-dire l'ensemble des fonctions f telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2$ converge.

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- 2) Soit f et g deux éléments de E . Montrer que fg est intégrable.
- 3) Soit f et g deux éléments de E . Prouver $\left(\int_{\mathbb{R}} fg\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} g^2\right)$.

Indication : $\forall t \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} (f + tg)^2 \geq 0$.

4) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que f possède une limite en $+\infty$ dès que f' est intégrable. Cette condition est-elle nécessaire? Montrer néanmoins que si f et f' possèdent des limites en $\pm\infty$ alors la limite de f' est nulle.

Soit f dans E de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f'' est aussi dans E on voudrait prouver que f' est dans E .

- 5) Montrer que $x \mapsto \int_0^x f f''$ possède une limite en $+\infty$
- 6) Montrer que si $f f'$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f n'est pas dans E .
- 7) Dédurre des deux questions précédentes que $\int_{\mathbb{R}^+} f'^2$ converge, puis que f' est dans E .
- 8) Dédurre de la question précédente que $f f'$ possède une limite en $+\infty$, puis que cette limite est nécessairement nulle.
- 9) En utilisant sans justification le résultat similaire en $-\infty$ prouver :

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2 = - \int_{\mathbb{R}} f f'' \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3:

- 1) Soit a un réel strictement positif. Calculer $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + a \sin^2 t}$.

Indication : Effectuer le changement de variable $u = \cotan t$.

- 2) En déduire un équivalent de $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$, où α est un réel strictement positif.
- 3) Discuter, suivant les valeur de $\alpha > 0$ de l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.

Exercice 4: Une application du lemme de Riemann-Lebesgue

- 1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

$$2) \text{ Calculer } I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Indication : Calculer $I_{n+1} - I_n$.

- 3) Montrer que la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ peut être prolongée à $[0, \pi]$ en une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
- 4) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0.$$

- 5) En déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 5: Soient $a > 0$ et $f_0 \in \mathcal{C}([0, a])$. On pose $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- 1) Montrer que, pour $n \geq 1$, f_n s'écrit sous la forme

$$f_n(x) = \int_0^x K_n(x, t) f_0(t) dt.$$

- 2) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement et déterminer sa somme.
- 3) Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact.