Intégration(II)

Ex 1: *CCMP 2016*
Soit $a_0 > 0$.
1) Montrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{1+\cos t}{t}\, dt = \frac{1}{n}.$$

2) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Ex 2: *CCMP 15*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\phi(t)\, dt$$

où ϕ est périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
1) Etudier la limite de F en $+\infty$.
2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Ex 3: *CCMP 2016*
On pose, pour tout entier n non nul :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}.$$

1) Montrer que la suite u est bien définie.
2) Calculer u_1 et u_2.
3) Montrer que la suite u est convergente, calculer sa limite ℓ.

Ex 4: *CCMP 15*
1) Montrer que

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

est bien définie sur $]0,1[$.
2) Etudier la continuité.
3) Montrer que

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{1-x}}{t(1+t)}\, dt.$$

En déduire $\inf\limits_{x\in]0,1[} F(x)$.
4) Donner un équivalent de F en 0^+.

Ex 5: *X 2016*
$I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, il existe x_0 dans $]a,b[$ tel que $f(x) < f(x_0)$ si $x \neq x_0$ et $f''(x_0) < 0$.
On pose pour tout n entier

$$I_n = \int_a^b e^{nf(x)} dx.$$

Donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.