Intégration, groupes

Exercice 1: *Le lemme de Riemann-Lebesgue*

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0$.
2) Enoncer sans démonstration un résultat analogue avec $\cos\lambda t$ et $e^{i\lambda t}$.
3) Montrer que ce résultat reste valable pour une fonction en escalier.
4) En déduire qu'il est aussi valable pour une fonction continue par morceaux.
5) Montrer que si f est intégrable sur I $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_I \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0$.

Exercice 2: *Une application du lemme de Riemann-Lebesgue*

1) Pour t réel calculer la somme $S_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt$. On écrira le résultat sous la forme $a\frac{\sin b}{\sin c}$. On pourra par exemple utiliser les formules d'Euler pour interpréter cette somme comme la somme d'une série géométrique.
2) Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout n entier non nul on ait : $\displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}$.
3) Montrer que la fonction valant $\frac{at^2+bt}{\sin\frac{t}{2}}$ sur $]0,\pi]$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.
4) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi (at^2+bt)S_n(t)\,dt$.
5) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3: *Une autre application du lemme de Riemann-Lebesgue*

1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.
2) Calculer $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$.

Indication : Calculer $I_{n+1} - I_n$.

3) Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ peut être prolongée à $[0,\pi]$ en une fonction de classe C^1.
4) En déduire la valeur de l'intégrale I, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 4: Soit $G = \{z\in\mathbb{C};\exists n\in\mathbb{N}\ z^{2^n} = 1\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\times)$.

Exercice 5:

1) Montrer que $G = \{a+b\sqrt{7};(a,b\in\mathbb{Z}^2,\ a^2-7b^2=1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$, puis que $H = G\cap\mathbb{R}^{*+}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^{*+}$.
2) Soit $x = a+b\sqrt{7}$ dans G, montrer que $x\in]1,+\infty[$ si et seulement si $a>0$ et $b>0$.
3) En déduire que $H\cap]1,+\infty[$ possède un plus petit élément, noté ϵ. Le déterminer.
4) Soit $K = \{\epsilon^n; n\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que K est un sous-groupe de H.
5) Prouver que $H = K$.
6) Décrire les éléments de G.

Exercice 6:

1) Montrer que $\inf\{(\sqrt{2}-1)^n; n\in\mathbb{N}\} = 0$. En déduire que $\{a+b\sqrt{2};(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ dense dans $\mathbb{R}$.
2) Plus généralement montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ ou bien est de la forme $\{ka;k\in\mathbb{Z}\}$, ou bien est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7: On note $\mathcal{H} = \{z\in\mathbb{C},\mathcal{I}\mathrm{m}\,z>0\}$.

1) Montrer que $G = SL_2(\mathbb{R}) = \{M\in M_2(\mathbb{R});\det M = 1\}$ est un sous-groupe (fermé) de $GL_2(\mathbb{R})$.
2) On définit une application

$$\begin{array}{rccc}\Phi & : & G\times\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}\\ & & (g,z) & \mapsto & g.z\end{array}$$

en posant

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

3) Montrer que cette application est bien définie, en particulier que son image est bien contenue dans $\mathcal{H}$.
4) Vérifier que

$$\forall (g,g')\in G^2\ \forall z\in\mathcal{H}\quad g.(g'.z) = gg'.z,\qquad \forall z\in\mathcal{H}\ e.z = z,$$

où $e = I_2$ est l'élément neutre de G. On dit que Φ définit une action de G sur $\mathcal{H}$ ou que G agit sur $\mathcal{H}$ par Φ.