Groupes — Révisions d'algèbre générale

Tout d'abord les exercices que nous n'avons pas pu aborder la semaine précédente.

Exercice 1: Soit $G = \{z \in \mathbb{C}; \exists n \in \mathbb{N}\ z^{2^n} = 1\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 2:
1) Montrer que $G = \{a + b\sqrt{7}; (a, b \in \mathbb{Z}^2,\ a^2 - 7b^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, puis que $H = G \cap \mathbb{R}^{*+}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^{*+}$.
2) Soit $x = a + b\sqrt{7}$ dans G, montrer que $x \in]1, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
3) En déduire que $H \cap]1, +\infty[$ possède un plus petit élément, noté ϵ. Le déterminer.
4) Soit $K = \{\epsilon^n; n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que K est un sous-groupe de H.
5) Prouver que $H = K$.
6) Décrire les éléments de G.

Exercice 3:
1) Montrer que $\inf\{(\sqrt{2} - 1)^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$. En déduire que $\{a + b\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dense dans $\mathbb{R}$.
2) Plus généralement montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ ou bien est de la forme $\{ka; k \in \mathbb{Z}\}$, ou bien est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4: On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}\mathrm{m}\, z > 0\}$.
1) Montrer que $G = SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}); \det M = 1\}$ est un sous-groupe (fermé) de $GL_2(\mathbb{R})$.
2) On définit une application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & G \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & & (g, z) & \mapsto & g.z \end{array}$$

en posant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

3) Montrer que cette application est bien définie, en particulier que son image est bien contenue dans $\mathcal{H}$.
4) Vérifier que

$$\forall (g, g') \in G^2\ \forall z \in \mathcal{H} \quad g.(g'.z) = gg'.z, \qquad \forall z \in \mathcal{H}\ e.z = z,$$

où $e = I_2$ est l'élément neutre de G. On dit que Φ définit une action de G sur $\mathcal{H}$ ou que G agit sur $\mathcal{H}$ par Φ.

****

Puis deux exercices posés à l'oral de Centrale-Supélec

Exercice 5: Combien le groupe $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ contient-il de sous-groupes ?
Indication : On pourra s'intéresser à l'image réciproque d'un tel sous-groupe par l'application canonique de $\mathbb{Z}$ vers $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 6: Soit p un nombre premier. soit n un multiple de p et G un groupe fini de cardinal n. Soit $E = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p, x_1 \cdots x_p = e\}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par :

$$(x_1, \ldots, x_p)\mathcal{R}(y_1, \ldots, y_p) \Leftrightarrow \exists k\ (x_1, \ldots, x_p) = (y_k, \ldots, y_p, y_1, \ldots, y_{k-1}).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer qu'une classe d'équivalence possède 1 ou p éléments.
3) Soit r le nombre de classes d'équivalence de cardinal 1 et s le nombre de classes d'équivalence de cardinal p. Montrer que $r + sp = n^{p-1}$.
4) Soit G un groupe de cardinal n divisible par le nombre premier p. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $x^p = e$ est divisible par p.
5) Donner un exemple de groupe pour lequel il est distinct de p.

Tourner la page, S.V.P.

Pour finir, un petit florilège d'exercices d'oraux CCP (les trois premiers), CCM(les quatre suivants) et un CCS (le dernier), pour réviser le programme d'algèbre linéaire de première année .

Exercice 7: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
1) Montrer que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ g \circ f$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}\ g = \mathrm{Im}\ g \circ f$.
3) Montrer que $E = \mathrm{Im}\ g \oplus \mathrm{Ker}\ g$.

Exercice 8: $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto P - P'$ va de E vers E.
1) Montrer que f est bijective de deux manières différentes, l'une d'elle utilisant les matrices.
2) Q étant donné trouver P tel que $P - P' = Q$.

Exercice 9: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et

$$N = \bigcup_{i \geq 1} \mathrm{Ker}\ u^i.$$

Montrer que

$$N = \mathrm{Ker}\ u \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u.$$

Exercice 10: Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit H et K deux sous espaces vectoriels de E.
1) Condition nécessaire et suffisante sur H et K pour qu'il existe f dans $L(E)$ tel que $\mathrm{Im}\ f = H$ et $\mathrm{Ker}\ f = K$?
2) Cette condition étant supposée vérifiée, soit

$$G = \{f \in L(E); \mathrm{Im}\ f = H \ \ \mathrm{Ker}\ f = K\}$$

Montrer que G est un groupe pour la composition si et seulement si $H \oplus K = E$.

Exercice 11: Soit E un espace vectoriel de dimension n, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 12: Soit E un espace vectoriel, p et q deux endomorphismes de E. Montrer que p et q sont des projecteurs de même noyau si et seulement si :

$$p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q.$$

Exercice 13: E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
1) Soit f et g deux endomorphismes de E. montrer que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ g$ si et seulement si il existe un endomorphisme h tel que $f = g \circ h$.
2) Soit f et g deux endomorphismes de E. on considère les trois propositions :

1. $f = f \circ g \circ f$
2. $g = g \circ f \circ g$
3. $\mathrm{rg}\ f = \mathrm{rg}\ g$

Montrer que deux d'entre elles impliquent la troisième.
3) Montrer que pour tout endomorphisme f il existe un endomorphisme g tel que (f, g) vérifie les trois propriétés précédentes.

Exercice 14: Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
1) Donner un encadrement (le plus fin possible) de $\mathrm{rg}\,(u + v)$ en fonction de $\mathrm{rg}\ u$ et $\mathrm{rg}\ v$.
2) Donner des cas particuliers non triviaux où on a égalité.
3) Montrer que $\mathrm{rg}\,(u + v) = \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v$ si et seulement si

$$\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Im}\ v = \{0\} \text{ et } \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{Ker}\ v = \mathbb{R}^n$$

4) Montrer que $\mathrm{rg}\,(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}\ u, \mathrm{rg}\ v)$
5) Montrer que $\mathrm{rg}\,(u \circ v) \geq \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v - n$
6) (subsidiaire) Donner des cas particuliers non triviaux dans lesquels les deux inégalités sont des égalités.