Polynômes

Exercice 1: Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $XP(X+1) = (X+3)P(X)$.

Exercice 2: Soient $(x_0, \dots, x_n)$ des réels deux à deux distincts. Pour $i = 0, \dots, n$ on pose

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

1) Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(0)$pour $0 \leq k \leq n$.
2) Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} L_i(0)$.
3) Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+2} L_i(0)$.

Exercice 3: Soient m et n deux entiers dont le pgcd est d. Prouver que le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$ est $X^d - 1$.

Exercice 4: Déterminer les polynômes à coefficients complexes vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 5: Soit P un polynôme à coefficients entiers. On se donne un nombre premier p.
1) Montrer que si a est premier avec p, pour tout b il existe x dans $[0, p-1]$ tel que $ax = b$ modulo p.
On suppose qu'il existe x_1 tel que $P(x_1) \equiv 0 \mod p$ et $P'(x_1) \not\equiv 0 \mod p$.
2) Montrer que l'on peut supposer x_1 dans $[0, p-1]$.
3) Montrer qu'il existe x_2 dans $[0, p^2 - 1]$ tel que $P(x_2) \equiv 0 \mod p^2$.
Indication : On cherchera x_2 sous la forme $x_1 + p\alpha_1$ en utilisant la formule de Taylor
4) Montrer qu'il existe x_d dans $[0, p^d - 1]$ tel que $P(x_d) \equiv 0 \mod p^d$.

Exercice 6: Soient $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\phi(n)})$ les racines primitives n-èmes de l'unité. On appelle polynôme cyclotomique d'ordre n le polynôme

$$\Phi_n = \prod_{i=1}^{\phi(n)} (X - \epsilon_i).$$

1) Si n est premier, exprimer Φ_n.
2) Si $P = QR$, où P et Q sont à coefficients entiers, Q de plus unitaire, alors R est à coefficients entiers.
3) Calculer $X^n - 1$ à l'aide des Φ_k, pour certains k.(Partitionner l'ensemble des racines de l'unité en fonction de leur ordre.)
4) En déduire que Φ_n est un polynôme à coefficients entiers.

Exercice 7:
1) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.
2) Si m est la multiplicité du nombre complexe α comme racine du polynôme P, à coefficients complexes, trouver la multiplicité de α comme racine du polynôme P', en justifiant la réponse.
3) En déduire que si P est un polynôme à coefficients réels scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors il en est de même de P'.
4) Soit $P = a\displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i}$ un polynôme non nul à coefficients complexes décomposé en produit de facteurs irréductibles.
Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.
5) En déduire le théorème de Gauss-Lucas. Les racines du polynôme P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à-dire s'expriment comme des barycentres à coefficients positifs des racines de P.

Exercice 8: Un élément x d'un corps $\mathbb{K}$ est algébrique sur le sous-corps k si l'idéal des polynômes de $k[X]$ annulant x n'est pas réduit à $\{0\}$. Soient α et β deux nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$.
1) Montrer qu'il existe une sous-algèbre de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$, de dimension finie contenant ces deux nombres.
2) En déduire que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques.
3) En déduire que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps.
4) Montrer que tout élément de $\mathbb{C}$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est élément de $\overline{\mathbb{Q}}$.