Réduction des endomorphismes

Exercice 1: A étant une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à la matrice X associe $X + \mathrm{tr}\,(X)A$.

Exercice 2: Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
1) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de uv associée au vecteur propre x, c'est aussi une valeur propre de vu. Précisez le vecteur propre associé.
2) Montrer que si 0 est valeur propre de uv alors 0 est valeur propre de vu.
3) Que déduire des deux questions précédentes ?

Exercice 3: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, $f \in L(E)$ tel que $P(f) = 0$.
Etablir que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 4: Déterminer les vecteurs propres de la matrice ${}^tXX$ où X est une matrice ligne réelle non nulle de longueur n.

Exercice 5: *Itérés d'un endomorphisme*
u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
1) Montrer Ker $u^p \subset$ Ker u^{p+1}.
2) Montrer Im $u^p \supset$ Im u^{p+1}.
3) Montrer que Im $u^p =$ Im $u^{p+1} \Leftrightarrow$ Ker $u^p =$ Ker u^{p+1}.
4) Montrer que Im $u^p =$ Im u^{p+1} implique Im $u^{p+1} =$ Im u^{p+2}. Etablir un résultat similaire avec les noyaux. Montrer qu'un tel p existe et que le plus petit est inférieur ou égal à n.
5) On suppose Im $u^p =$ Im u^{p+1}, prouver : $E =$ Ker $u^p \oplus$ Im u^p et u réalise un isomorphisme de Im u^p sur lui-même.
6) Soit p un entier quelconque, déterminer le noyau et l'image de la restriction de u à Im u^p, en déduire l'inégalité :

$$\dim \mathrm{Im}\ u^p - \dim \mathrm{Im}\ u^{p+1} \leq \dim \mathrm{Ker}\ u \quad .$$

7) En considérant maintenant la restriction à Ker u^{p+1} obtenir l'inégalité similaire :

$$\dim \mathrm{Ker}\ u^{p+1} - \dim \mathrm{Ker}\ u^p \leq \dim \mathrm{Ker}\ u \quad .$$

8) Désignons par F_p un supplémentaire de Im u^p dans Im u^{p-1}. Montrer que Im u^p est la somme de Im u^{p+1} et de $u(F_p)$. En déduire l'inégalité

$$\dim \mathrm{Im}\ u^p - \dim \mathrm{Im}\ u^{p+1} \leq \dim \mathrm{Im}\ u^{p-1} - \dim \mathrm{Im}\ u^p \quad .$$

Retrouver ainsi le résultat d'une question précédente.

Exercice 6: Soient $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{C}), f'(0) = f(1) = 0\}$, et $u : \ E \ni f \mapsto g$ tel que

$$g(x) = (1-x)\int_0^x f(t)\ dt + \int_x^1 (1-t)f(t)\ dt.$$

Vérifier que u est à valeurs dans E. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 7: *Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton*
$\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque. Si M appartient à $M_n(\mathbb{K})$ son polynôme caractéristique χ_M est le polynôme $\det(M - X.I_n)$ calculé dans $M_n(\mathbb{K}(X))$. On notera

$$\chi_M(X) = (-1)^n(X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n_1}X + a_n).$$

On se propose de démontrer $\chi_M(M) = 0$, c'est le théorème de Cayley-Hamilton.
1) Si A est une matrice à coefficients dans un corps commutatif quelconque, pouvez-vous expliquer comment on obtient la formule

$$A\ {}^t\mathrm{com}(A) = (\det A).I_n \quad ?$$

On note $(*)$ cette égalité pour $A = M - X.I_n$.
2) Expliquez pourquoi les coefficients de ${}^t\mathrm{Com}(M - X.I_n)$ sont des polynômes de degré au plus $n - 1$.
3) Montrez que toute matrice de $M_n(\mathbb{K}(X))$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus p s'écrit de manière unique

$$A_0 + X.A_1 + \cdots + X^p.A_p$$

où les A_i sont des éléments de $M_n(\mathbb{K})$. On peut donc écrire

$${}^t\mathrm{Com}(M - X.I_n) = B_{n-1} + X.B_{n-2} + \cdots + X^{n-1}.B_0$$

4) En effectuant le produit dans $(*)$ et en utilisant la question précédente obtenir un procédé de récurrence permettant de calculer les B_i.
5) Calculez B_0, B_1, B_2 puis B_i pour i quelconque en fonction de M et des coefficients de χ_M.
6) L'identification des deux derniers coefficients non utilisés devrait vous permettre de conclure.

Exercice 8: E est un espace vectoriel de dimension quelconque sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.
1) Montrer qu'un en endomorphsme de E qui laisse toute droite stable est ne homothétie.

On suppose maintenant E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2) Montrer que dans un espace de dimension au moins 3 toute droite est l'intersection de deux plans.
3) En déduire que dans un espace de dimension 3 toute application linéaire qui laisse tout plan stable est une homothétie.
4) Démontrer de même que dans un espace de dimension au moins $p + 1$, toute application linéaire qui laisse stable tout sous-espace de dimension p est une homothétie.

Exercice 9: Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $s \in \mathcal{S}$, on définit $s^* \in \mathcal{S}$ par la relation

$$s_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

1) Montrer que l'application $\varphi :\ s \longrightarrow s^*$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer φ^{-1}.
2) Exprimer les valeurs propres d'un automorphisme à l'aide des valeurs propres de son automorphisme réciproque, ainsi que les vecteurs propres associés.
3) En déduire les valeurs propres de φ et les vecteurs propres associés.