Réduction des endomorphismes

Ex 1: *X 08*
Soit $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base. Soit σ une permutation de $[1, n]$, s l'endomorphisme de E tel que $s(e_i) = e_{\sigma(i)}$ et S la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$. Etudier la diagonalisabilité de S.
Indication : Penser à l'ordre de σ. Que dire du produit de S et S', respectivement associées à σ et σ' ?

Ex 2: *Centrale-Supélec 08*
E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. f est un endomorphisme de E. P est dans $\mathbb{C}[X]$.
1) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.
2) Montrer que si μ est une valeur propre de $P(f)$ alors il existe une valeur propre λ de f telle que $\mu = P(\lambda)$.
Indication : Penser à la trigonalisation.

Ex 3: *ESM St-Cyr 09*
On appelle A la matrice tridiagonale avec des 0 sur la diagonale principale et des -1 sur les deux autres.
1) Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
2) Résoudre $(A - 2\cos(t)I_n)X = 0$ (Xest un vecteur colonne)
3) Valeurs propres de A.
4) Vecteurs propres de A.

Ex 4: *CCM 15*
1) Montrer que toute matrice de $M_2(\mathbb{C})$ de trace nulle est diagonalisable ou nilpotente.
2) Le résultat est-il encore vrai dans $M_3(\mathbb{C})$.

Ex 5: *CCM 15*

$$A = \begin{pmatrix} a & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) CNS pour que A soit diagonalisable ?
2) CNS pour que A soit un projecteur ?
3) Polynôme minimal de A ?

Ex 6: *T.P.E 09*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) A est-elle diagonalisable ? B ?
2) A et B sont-elles semblables ?
3) Calculer A^n.

Ex 7: *Mines-Ponts 09*
Etudier la digonalisabilité dans $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$$

Ex 8: *CCM 2014*
Soit A, B et C dans $M_n(C)$ telle que $AB = BC$. Condition pour que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Ex 9: *CCM 2014*
Soit A dans $M_3(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 1$, $\operatorname{tr}(A^2) = 3$ et $\det(A) = -1$ et $A^2 \neq I_3$. Déterminer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ? Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit diagonalisable.

Ex 10: *C.C.P 09*
Soit p dans $\mathbb{N}^*$, λ et μ dans $\mathbb{C}^*$ distincts, et A, B et M dans $M_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} I_p & = & A & + & B \\ M & = & \lambda A & + & \mu B \\ M^2 & = & \lambda^2 A & + & \mu^2 B \end{array}\right.$$

1) Montrer que M est inversible. Calculer M^{-1}
Indication : Utiliser $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$.
2) Montrer que A et B sont des projecteurs.
3) M est-elle diagonalisable ? Donner son spectre.

Ex 11: *CCS 15*
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall s \in G\ s^2 = I_n$.
On dit qu'une partie X de $M_n(\mathbb{C})$ est uniformément diagonalisable si et seulement si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \forall M \in X\ P^{-1}MP \in \mathbb{D}_n(\mathbb{C})$$

où $\mathbb{D}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace vectoriel des matrices diagonales.
1) Montrer que G est un groupe abélien.
2) Montrer que G est uniformément diagonalisable.
3) Montrer que G est de cardinal fini.
4) En déduire que si $GL_n(\mathbb{C}) \sim GL_m(\mathbb{C})$ alors $m = n$.

Ex 12: *CCS 2014*
Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 & & b_n \\ b_1 & a_2 + b_2 & & \vdots \\ \vdots & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_n \\ b_1 & b_2 & & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal à $a_i + b_i$ si $i = j$, à b_j sinon.
1) Calculer $\det A$.
Indication : On servira du fait que le déterminant est une forme n-linéaire alternée en les colonnes de la matrice.
2) Montrer que

$$\chi_A(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n) \left(1 + \frac{b_1}{a_1 - X} + \cdots + \frac{b_n}{a_n - X}\right).$$

3) On suppose tous les a_i distincts et les b_i strictement positifs. A est-elle diagonalisable ?
Indication : Etudier les limites de χ_A en les a_i et en l'infini.
4) On suppose toujours les b_i strictement positifs, mais les a_i ne sont plus tous distincts. A est-elle toujours diagonalisable ?
Indication : On étudiera le rang $A - a_j I_n$.