Exercices classiques II

Exercice 1: Nature de la série $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Exercice 2: Soit
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$
1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 3: Soit
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x^2}.$$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 4: On considère la série entière
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n+1}.$$
1) Rayon de convergence ?
2) Plus grand intervalle sur lequel on a la convergence simple ?
3) Etudier la convergence normale et uniforme sur $[0, 1[$ et $[-1, 0]$.

Exercice 5: Déterminer sous la forme d'une intégrale :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \sin x \, dx.$$

Exercice 6: Montrer que
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$
en n'utilisant que le programme de première année.

Exercice 7: Comparer
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ à } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8:
1) Majorer $\left|\ln(1 - 2x\cos t + x^2)\right|$ par une fonction de t indépendante de x, définie sur $]0, \pi[$, sachant que x est dans l'intervalle $[0, a]$, $a > 1$. Cette fonction est-elle intégrable ?
2) Reprendre la question si x est dans $[-a, a]$, $a > 1$.

Exercice 9: Calculer
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{\frac{-t^2}{2}}, dt.$$

Exercice 10: Calculer $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt$.
Indication : Montrer que I est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 11: Déterminer le nombre d'éléments inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{78\mathbb{Z}}$. Justifier la caractérisation employée.

Exercice 12: Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire
$$Z(M_n(\mathbb{K})) = \{M \in M_n(\mathbb{K}); \forall N \in M_n(\mathbb{K})\ MN = NM\}.$$