Probabilités

Quelques exercices de probabilité posés aux oraux des concours en 2016.

Ex 1: *Autres écoles PC 2016*
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

Ex 2: *Autres écoles PSI 2016*
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.
1) Justifier que X_n est bien une variable aléatoire et donner sa loi.
2) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3) On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 et celle de Y_3.

Ex 3: *Autres écoles MP 2016*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire donnant le rang du n-ième succès.
1) Expliciter la loi de T_1.
2) Déterminer la loi de T_n.

Ex 4: *C.C.S. PC 2016*
Trois clients arrivent dans une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 vont aux deux guichets, le client C_3 va au premier guichet libéré. Le temps passé au guichet par le client C_i suit une loi géométrique de paramètre p. Ces temps sont indépendants. Déterminer la probabilité que le client C_3 termine le dernier ?

Ex 5: *C.C.S. PSI 2016*
Une urne contient n boules numérotées. On y pioche avec remise, jusqu'à obtenir une deuxième fois une boule déjà tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
1) Soit $i \in \{2, \dots, n+1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(X > i | X > i-1)$.
2) Soit $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Montrer $\mathbb{P}(X > k) = \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X > i | X > i-1)$.
3) Soit Soit $k \in \{2, \dots, n+1\}$. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$.

Ex 6: *C.C.S. MP 2016*
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ boules blanches et noires dans une urne. On note X_0 la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant initial. On suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $[1, n]$. On effectue alors l'opération « tirage-remplacement »suivante. On tire deux boules de l'urne. Si elles sont de couleur différentes, on les remet dans l'urne ; si elles ont la même couleur, on les remplace par une boule blanche et une boule noire. On itère ce « tirage-remplacement »et on note X_k la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches à l'issue de la k-ième opération.
1) En utilisant un argument de symétrie, montrer que l'espérance de X_k est constante.
2) On pose $U_k = {}^t(\mathbb{P}(X_k = 1), \dots, \mathbb{P}(X_k = n))$. Construire A dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout k $U_{k+1} = AU_k$.
3) Montrer que la suite $(A^p)_{p\geq 0}$ est convergente.

Tourner la page, S.V.P.

Ex 7: *C.C.M. PC 2016*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 0\}$. Déterminer la loi de T.

Ex 8: *C.C.M. PSI 2016*
1) On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de paramètre $p \in]0, 1[$. On appelle doublet le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose les évènements suivants : A_n « obtenir le premier doublet au rang n » ; B_n « obtenir au moins un doublet au cours des n premières épreuves ». Enfin, on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $q = 1 - p$.
2) Montre que $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k$. Montrer que $p_{n+1} = p^2 q\,(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k)$.
3) En déduire une elation entre p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.
4) Résoudre cette relation de récurrence.
Indication : Poser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 9: *C.C.M. MP 2016*
Soit $n \geq 2$ un entier, on donne une matrice aléatoire M de $M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires mutuellemnt indépendantes et de même loi, admettant une espérance. pour $\lambda \in \mathbb{C}$ calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$, χ_M désignant le polynôme caractéristique de M.

Ex 10: *X PC 2016*
Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers. On suppose $2 \leq p_1 < pp_2 \leq n$. On muni l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit $E_1 = \{k \in \{1, \ldots, n\}, p_1 | k\}$ et $E_2 = \{k \in \{1, \ldots, n\}, p_2 | k\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si et seulement si n s'écrit sous la forme $n = kp_1p_2 + \ell p_1$ avec $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq lp_1 < p_2$.

Ex 11: *X PSI 2016*
On considère quatre spots lumineux $S_1, \ldots, S_4$. A $t = 0$, seul S_1 est allumé. Si à un instant n le spot S_1 est allumé alors à l'instant $n + 1$ on allume un spot au hasard parmi les quatre, et on éteint S_1 si le spot choisi n'est pas S_1. Si un autre spot S_k, $k \in \{2, 3, 4\}$ est allumé alors on l'éteint et on allume S_{k-1}.
1) Calculer la probabilité que seul S_1 soit allumé jusqu'à l'instant n inclus.
2) Trouver la loi de la variable aléatoire T indiquant l'instant auquel S_2 s'allume pour la première fois.
3) Trouver l'espérance de T.

Ex 12: *X MP 2016*
Soit $n \geq 2$ un entier, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[1, n]$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y t Z définies sur un même espace probabilisé, a valeurs dans $\mathbb{N}$, non certaines telles que $X \sim Y + Z$ si et seulement si n n'est pas premier.