Probabilités (II)

Exercice 1: Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, ayant même moyenne m et même variance σ^2.
1) On pose $\overline{X_n}=\frac{i}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
2) On pose $S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X_n})^2$. Calculer l'espérance de S_n^2.

Exercice 2: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>n)$.

Exercice 3: Le nombre N d'usagers entrant durant une journée dans un bureau de poste fixé suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour qu'un tel usager viennent pour expédier un colis est p. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'usagers venus expédier un colis.
1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $N=n$.
2) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3) Déterminer la loi de N sachant $X=k$, son espérance et sa variance.

Ex 4: *CCS 15*
1) Soit X une VAD centrée telle que $|X|\le 1$.
   a) Montrer que
$$\forall t\in\mathbb{R}\ \forall x\in[-1,1]\quad \exp(tx)\le \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)+\frac{1}{2}(1-x)\exp(-t).$$
   b) Pourquoi $E(\exp(tX))$ existe-t-elle ? Montrer que $E(\exp(tX))\le \operatorname{ch} t$.
   c) En déduire $E(\exp(tX))\le \exp(\frac{t^2}{2})$.
2) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des VAD centrées indépendantes et bornées. On note $c_j=\|X_j\|_\infty$ et on pose $S_n=\sum_{j=1}^n X_j$.
   a) Montrer que
$$E(\exp(tS_n))\le \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^n c_j^2\right)$$
   b) En utilisant l'inégalité de Markov montrer que :
$$\forall t>0\ \forall \epsilon>0\quad \mathbb{P}(S_n>\epsilon)\le \exp\left(-\epsilon t+\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^n c_j^2\right).$$
   c) En déduire
$$\forall \epsilon>0\quad \mathbb{P}(S_n>\epsilon)\le \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right).$$

Exercice 5: Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A est un élément de $\mathcal{A}$ on note 1_A sa fonction indicatrice.
1) Quelle est la fonction indicatrice d'une intersection, du complémentaire. En déduire la fonction indicatrice d'une réunion.
2) Montrer que pour tout élément A de $\mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}(A)=E(1_A)$.
3) Si $(A_1,\dots,A_n)$ est dans $\mathcal{A}^n$, $n\ge 1$, déduire des deux questions précédentes :
$$\mathbb{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right).$$
4) En déduire que si X estune variable aléatoire discrète à valeurs dans E et si $(A_1,\dots,A_n)$ est dans E^n, $n\ge 1$, alors :
$$\mathbb{P}(X\in A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\mathbb{P}(X\in A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right).$$

Exercice 6: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs dans le même ensemble dénombrable $E(\subset \mathbb{R})$, toutes de même loi, indépendantes de la variable aléatoire N. On définit la variable aléatoire S par

$$\forall \omega \in \Omega \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Calculer l'espérance de S, en fonction de celle de N et de X_1 qui seront supposées finies.

****

Exercice 7: On donne : $\forall p \leq n, \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire dex boules au hasard. On note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au numéro le plus petit (resp. le plus grand) des deux boules.

1) Déterminer la loi de (X, Y). En déduire les lois de X et Y.
2) Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y-2))$ et $V(Y)$.
3) Montrer que $n+1-X$ suit la même loi que Y. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4) Calculer $E(X(Y-2))$ et $\mathrm{Cov(X,Y)}$.

Exercice 8:

1) Soit X une variable aléatoire réelle et bornée. montrer que pour d dans $\mathbb{R}$ $P(X \geq d) \leq \inf\limits_{t>0} \dfrac{E(e^{tX})}{e^{td}}$.
2) Soit $p \in]0,1[$. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Que donne l'inégalité précédente pour X_n et $d = \alpha n$?

Exercice 9: Soit $X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(X_n = -1) = p$, $P(X_n = 1) = 1-p$ avec $p \in]0,1[$. On pose $Z_n = \prod_{k=1}^n X_k$, $a_n = \mathbb{P}(Z_n = -1)$ et $b_n = \mathbb{P}(Z_n = 1)$.

1) Calculer $a_n + b_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.
2) Calculer a_n en fonction de n et p.
3) Exprimer $E(Z_n)$, $\mathrm{Cov(Z_n, Z_{n+1})}$ en fonction de n et p. Déterminer la limite de $E(Z_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z_1 et Z_2 soient indépedantes.

Exercice 10: Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev.

Exercice 11: On s'intéresse à un examen passé par N candidats qui ont chacun une probabilité $p \in [0,1]$ de réussir l'examen à chaque passage. Les candidats passent l'examen jusqu'à ce qu'ils réussisent. Les passages des candidats sont mutuellemnt indépendants. On note X_k, avec $1 \leq k \leq N$, le nombre de passages nécessaires au candidat k pour réussir l'examen. On pose $X = X_1 + \cdots + X_N$ et $Y = \max_{1\leq k \leq N} X_k$.

1) Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.
2) Donner la loi de X son espérance et sa variance.

Indication : Pour la loi de X, on pourra utiliser les fonctions génératrices.

3) Donner la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq k)$, en déduire la loi de Y.

Exercice 12: On lance deux dés équilibrés. Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1) Déterminer la loi et l'espérance de X.
2) Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
3) Calculer de même XY et en déduire $\mathrm{Cov(X,Y)}$.

Exercice 13:

1) Soit $\alpha > 0$. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$.
2) Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$ quand n tend vers $+\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.