Fonction d'une variable réelle

Exercice 1: *Ecrit ENS ULCR* 2017
Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et périodique est uniformément continue.

Exercice 2: Etablir l'inégalité suivante :

$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{Très utile!} \quad .$$

Exercice 3: Montrer que pour $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n tel que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
Calculer explicitement P_n et en déduire, pour $x > 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin n \arctan \frac{1}{x} \quad .$$

Exercice 4:
1) Soit $f : I \to E$ une application dérivable en x_0, soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de I telles que :
- $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq x_0 \leq b_n$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \neq b_n$,
- $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n - a_n}(f(b_n) - f(a_n)) = f'(x_0).$$

On suppose maintenant f dérivable sur le segment $[a, b]$ et on se donne une fonction g dérivable sur $[a, b]$.
On suppose de plus $\|f(b) - f(a)\| \geq g(b) - g(a)$.
2) On note $c = \frac{a+b}{2}$, montrer $\|f(b) - f(c)\| \geq g(b) - g(c)$ ou $\|f(c) - f(a)\| \geq g(c) - g(a)$.
3) En déduire l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) et d'un x_0 vérifiant les hypothèses de la première question et telles que de plus, pour tout n : $\|f(b_n) - f(a_n)\| \geq g(b_n) - g(a_n)$.
4) En déduire l'existence d'un x_0 tel que $\|f'(x_0)\| \geq g'(x_0)$.
5) En remplaçant g par $g_\epsilon : x \mapsto g(x) + \epsilon x$, pour un ϵ bien choisi, montrer que si $\|f(b) - f(a)\| > g(b) - g(a)$, il existe x_0 tel que $\|f'(x_0)\| > g'(x_0)$. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 5: Soient I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, et $D^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, à valeurs réelles.
Soit $f \in D^n(I)$, on suppose qu'il existe $a \in I$ tels que $f^{(n)}$ s'annule en a, en changeant de signe. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall g \in D^n(I),\ \|f - g\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \exists b \in I,\ |b - a| \leq \varepsilon \text{ et } g^{(n)}(b) = 0.$$