Convexité

Exercice 1: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 2: Si ϕ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réel E et si a est un réel, les ensembles $\{x \in E; \phi(x) \geq a\}$ et $\{x \in E; \phi(x) > a\}$ sont des parties convexes. Si ϕ est non nulle, on parle de demi-espace fermé et ouvert.

Exercice 3: *(TPE)* Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t \, dt \geq 0$$

Exercice 4: *(TPE)*
1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et croissante, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ telle que $\ln f$ soit convexe. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ f^{α} est convexe.
3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ telle que pour tout $\alpha > 0$ f^{α} est convexe. Montrer que $\ln f$ est convexe.

Exercice 5: Soit f une fonction à valeur réelle, définie et continue sur l'intervalle I (non réduit à un point), dérivable sur $J = I \backslash E$ où E est un ensemble fini. Montrer que si f' est croissante sur J alors f est convexe.

Exercice 6: Soit f est une fonction convexe de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$. Prouver :
1) f est continue sur $]a, b[$,
2) f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.
3) les fonction f'_g et f'_d sont croissantes.

Exercice 7: *(CCS)*
1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2. A quoi correspond la racine de P' par rapport à celles de P, dans le plan complexe.
2) Soit P de degré n, à quoi correspond la racine de $P^{(n-1)}$ dans le plan complexe.
3)
- Montrer que si O appartient à $\mathrm{Conv}(z_1, \dots, z_n)$ où les z_i sont non nuls alors O appartient à $\mathrm{Conv}(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n})$
- Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$.
- Démontrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (Théorème de Gauss-Lucas).

Exercice 8: *(CCS)* Soit $k > n$. $(A_0, \dots, A_k)$ sont des points de $\mathbb{R}^n$. Les coefficients associés aux points sont positifs.
1) Définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et du barycentre de points de $\mathbb{R}^n$.
2) Que dire de la famille $(\overrightarrow{GA_0}, \dots, \overrightarrow{GA_{k-1}})$?
3) Soit $\Omega = \{t \in \mathbb{R} | \forall i \in [0, k-1] \ \alpha_i + t\lambda_i \geq 0\}$, où les α_i sont dans $\mathbb{R}^+$ et les λ_i dans $\mathbb{R}$ et non tous nuls. Montrer que Ω admet un maximum ou un minimum.
4) Soit G un barycentre à coefficients positifs des $(A_0, \dots, A_k)$. Montrer que G est un barycentre (à coefficients positifs) de k de ces $k+1$ points.
5) (oubliée par le candidat, reconstituée) Montrer que tout barycentre des $(A_0, \dots, A_k)$ est un barycentre de $n+1$ d'entre eux.