Séries de fonctions – Séries entières

Ex 1: *CCP 2017* (269)
Soit λ dans $\mathbb{R}-2\mathbb{Z}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $a_0 \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-\lambda}{n+1}$.
1) Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
2) Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie une équation différentielle et donner une expression simple de f.

Ex 2: *CCMP 2017* (359)
Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
Indication : Utiliser $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)$, avec $f_k(n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha n}$ si $k < n$ et $f_k(n) = 0$ si $k \geq n$. Appliquer le théorème de permutation des limites.

Ex 3: *CCMP 2017* (330)
On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n dt$. On note $S(x)$ sa somme lorsqu'elle converge en x.
Déterminez le rayon de convergence, étudiez les points $x = 1$ et $x = -1$ et donnez la valeur de la somme.
Indication : Plan d'attaque possible.
- Effectuer le changement de variable $u = \tan t$ pour obtenir une autre expression de a_n.
- Par un encadrement de a_n par deux intégrales simplement calculables obtenir un majoration et une minoration de a_n.
- En déduire le rayon de convergence de la série entière.
- En déduire ce qu'il en est de la convergence en 1.
- Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
- En déduire ce qu'il en est de la convergence en -1.
- En utilisant le théorème de permutation de l'intégrale sur un segment et de la somme donnet la valeur de $S(x)$ sous la forme d'une intégale pour $|x| < 1$.
- Calculer cette intégrale en utilisant une décomposition en éléments simples.
- En déduire la valeur de $S(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite que l'on justifiera.

Ex 4: *CCMP 2017* (352)
Soit α un réel non entier et $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$
1) Donner le développement en série entière de f_α. On note R son rayon de convergence et pour x dans $]-R, R[$ $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2) En faisant un développement asymptotique de $\ln|a_{n+1}| - \ln|a_n|$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}$.
En déduire la nature selon α de $\sum_{n\geq 0} a_n$.
Indication : Montrer que $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente en établissant la convergence de $\sum_{n\geq 1} \ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$, où $w_n = n^{1+\alpha} a_n$.
3) Calculer pour $\alpha > -1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Indication : Utiliser le théorème de permutation des limites en montrant que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1[$ (normalement si $\alpha > 0$, et grace à la majoration du reste d'un série vérifiant le critère de Leibniz (le vérifier effectivement) si $0 \geq \alpha > -1$).

Ex 5: *CCMP 2017* (312)
1) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives définies sur un ensemble U. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur U et que pour tout x $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante.
Montrer que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f_n$ converge uniformément sur I.
2) On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\lfloor \frac{n}{k}\rfloor$. Montrer que $u_n \sim n\ln 2$.
Indication : Prendre $U = \mathbb{N}^*$ et $f_k(n) = \frac{1}{n}\lfloor \frac{n}{k}\rfloor$

Ex 6: *CCS 2017* (357)
1) Pour s dans $\mathbb{C}$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$. Montrer que ζ est définie et continue sur $D = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 1\}$.
2) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, +\infty[\to \mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall n \geq a \quad |f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx| \leq \frac{1}{2}\max_{t\in[n,n+1]}|f'(t)|.$$

3) Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $D' = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0\}$. Donner son développement asymptotique.
Indication : Poser $u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx$ et montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $D(a,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq a \text{ et } \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \geq \epsilon\}$.

Ex 7: *CCMP 2017* (276)
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $n = \circ(p_n)$. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n} = 0.$$

Indication : Soit N un entier quelconque, montrer qu'il existe un entier $K \geq 1$ tel que (justifier chaque inégalité) :

$$\begin{aligned}\forall x_i n[0,1[\quad (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n} &\leq (1-x)\sum_{n=0}^{K-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=K}^{+\infty} x^{nN} \\ &\leq K(1-x) + \frac{x^{KN}}{1+x+\cdots+x^{N-1}} \\ &\leq K(1-x) + \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Terminer ensuite en utilisant $\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$.

Ex 8: *ENS Cachan 2017* (245)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose u de rayon de convergence infini et non constante.
1) Montrer que : $\forall \epsilon > 0\ \exists z\ |z| < \epsilon$ et $|u(z)| > |a_0| = |u(0)|$.
2) Montrer que : $\forall R \geq 0\ \sup_{|z|\leq R}|u(z)| = \sup_{|z|=R}|u(z)|$.
Indication : Si z_0 est dans $\mathbb{C}$, montrer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad v(z) = u(z+z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \qquad \text{(exercice sur les sommes doubles)},$$

puis raisonner par l'absurde en appliquant le résultat de la question précédente.
3) Montrer que : $\forall r \geq 0\ |u'(0)| \leq \frac{2}{r}\sup_{|z|=r}|u(z)|$.
Indication : Considérer $w(z) = \dfrac{u(z)-u(0)}{z}$.