Réduction des endomorphisme (I)

Exercice 1: Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
1) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de uv associée au vecteur propre x, c'est aussi une valeur propre de vu. Précisez le vecteur propre associé.
2) Montrer que si 0 est valeur propre de uv alors 0 est valeur propre de vu.
3) Que déduire des deux questions précédentes ?

Exercice 2: Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à la matrice X associe $X + \mathrm{tr}\,(X)A$.

Exercice 3: Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considére l'application d avec $d(f) = g$ où $g(x) = f'(x) - xf(x)$.
1) Montrer que d définit bien un endomorphisme de E.
2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de d.

Exercice 4: Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Soit x dans E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre et forme une base du plus petit sous-espace stable contenant x, noté F. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans cette base ?

Exercice 5: Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$. Soit F un sous-espace stable par f. Soit G un supplémentaire quelconque de F et p le projecteur sur F parallèlement à G. Soit

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ p \circ f^{n-k}.$$

1) Montrer $q(x) = x$ si x est dans F.
2) Montrer que $q \circ f = f \circ q$.
3) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $p \circ f^k \circ p = f^k \circ p$.
4) En déduire que $p \circ q = q$ et $q \circ q = q$.
5) Déduire des questions précédentes que $F = \mathrm{Im}\ q$.
6) Déduire des questions précédentes que F admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 6: Déterminer les vecteurs propres de la matrice ${}^tXX$ où X est une matrice ligne réelle de longueur n.

Exercice 7: Soit A un élément donné de $M_2(\mathbb{R})$, on lui associe l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ $u : M \mapsto AM$. Valeurs et vecteurs propres de u ?

Exercice 8: Soient $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{C}), f'(0) = f(1) = 0\}$, et $u :\ E \ni f \mapsto g$ tel que

$$g(x) = (1-x) \int_0^x f(t)\ dt + \int_x^1 (1-t)f(t)\ dt.$$

Vérifier que u est à valeurs dans E. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.