Réduction des endomorphismes (II)

Exercice 1: Les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont elles semblables ?

Exercice 2: Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3: Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $u(P) = Q$ avec :

$$Q(X) = (1 - X^2)P'(X) - kXP(X).$$

1) Déterminer k pour que U soit un endomorphisme de E. On suppose k ainsi choisi.
2) Déterminer le noyau de U.
3) Valeurs propres et vecteurs propres de U.

Exercice 4: Déterminer (a, b, c, d, e, f) pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $M_4(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

Exercice 5: Résoudre dans $M_4(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 6: Soit A de $M_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = A$.

Tourner la page, S.V.P.

Exercice 7: Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé. Montrer qu'elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} .$$

Exercice 8: E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, on considère une sous-algèbre A de $L(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par A soient $\{0\}$ et E.
1) Soit $u \in L(E)$, montrer que l'on a rg(u)=1 si, et seulement si, il existe un couple d'éléments non nuls $(y, f) \in E \times E^*$ tels que $u(x) = f(x)y$.
2) Montrer que si x est un élément non nul de E, $\{u(x),\ u \in \mathcal{A}\} = E$.
3) On considère $u \in \mathcal{A}$ de rang minimal r parmi les éléments non nuls de A, et on suppose $r > 1$.
4) Montrer qu'on peut trouver $x, y \in E$ tels que $(u(x), u(y))$ soit libre.
5) Etablir qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $(u \circ v \circ u, u)$ soit libre.
6) Prouver qu'il existe un élément non nul z de Im(u) et un nombre complexe λ tels que $u \circ v(z) = \lambda z$. Quel est le rang de $u \circ v \circ u - u$? En déduire une contradiction.
7) Soient $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1, $f_0 \in E^*$, $y \in E$ tels que $u_0(x) = f_0(x)y$.
8) Montrer que $E^* = \{f_0 \circ v,\ v \in \mathcal{A}\}$.
9) Prouver que pour tout $z \in E$, l'endomorphisme $x \mapsto f_0(x)z$ appartient à A.
10) Montrer que $\mathcal{A}$ contient tous les endomorphismes de rang un et en déduire que $\mathcal{A} = L(E)$.

Exercice 9: Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et Gdeux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$.Soient $u \in L(G, F)$, $v \in L(F, G)$ et f défini par :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad f(x + y) = u(y) + v(x).$$

1) Montrer que uv et vu ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2) Quelles relations y-a-t-il entre les valeurs propres de uv, vu et f ?
3) Quelles relations y-a-t-il entre les vecteurs propres de uv, vu et f ?
4) Montrer que si f est diagonalisable, alors uv et vu sont diagonalisables. Donner un contre-exemple pour la réciproque.