Réductions des endomorphismes (III)

Exercice 1: L'endomorphisme $P(X) \mapsto P(2-X)$ de $\mathbb{K}[X]$ est-il diagonalisable ?

Exercice 2: Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère $u \in L(E)$, $x_0 \in E$ tel que

$$(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$$

soit une base de E. Déterminer

$$\{v \in L(E), v \circ u = u \circ v\}.$$

Exercice 3: On se donne la matrice A suivante. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour n plus grand que 2, on ait $A^n = a_n A + b_n A^2$. Déterminer ces suites.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4: Soit E un espace vectoriel de dimension 3, f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f^3$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, $f \in L(E)$ tel que $P(f) = 0$.
Etablir que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 6: Soit A une matrice vérifiant $A^2 - 5A + 6I_n = 0$. Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $F(M) = AM + MA$. Etudier les éléments propres de F.

Exercice 7: Déterminer tous les sous-espaces laissés stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8: Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel vérifiant $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0$, montrer que tout sous-espace vectoriel stable par F possède un supplémentaire stable.

Exercice 9: Un endomorphisme est semi-simple si et seulement si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u. Montrer que u est semi-simple si et seulement son polynôme minimal est premier avec son polynôme dérivé, c'est-à-dire est le produit de facteurs irréductibles tous distincts.