Espaces préhibertiens réels

Exercice 1: On se donne $n+1$ points distincts $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ de $\mathbb{R}$. On rappelle que $E=\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$ dont $F_p=\mathbb{R}_p[X]$ est un sous-espace de dimension $p+1$ si $p\leq n$. Si P et Q sont deux éléments de E on pose $(P|Q)=\sum_{i=1}^{n+1}P(x_i)Q(x_i)$.
1) Montrer que $(P,Q)\mapsto(P|Q)$ est un produit scalaire sur E.
Soit $(y_1,\ldots,y_{n+1})$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$. On veut minimiser $\sum_{i=1}^{n+1}(y_i-P(x_i))^2$ où P parcourt F_p.
2) Montrer qu'il existe un unique Q de E tel que pour tout i on ait $Q(x_i)=y_i$.
3) Soit Q_p la projection orthogonale de Q sur F_p. Prouver :

$$\sum_{i=1}^{n+1}(y_i-P(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n+1}(y_i-Q_p(x_i))^2+\sum_{i=1}^{n+1}(Q_p(x_i)-P(x_i))^2$$

En déduire que le minimum existe et est atteint en l'unique point Q_p.
4) En écrivant que $(Q-Q_p|X^k)=0$ pour $0\leq k\leq p$ obtenir le système vérifié par les coefficients a_k de Q_p (i.e. $Q_p=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$).
5) Résoudre ce système pour $p=1$. Il s'agit de la droite de régression.

Exercice 2: On note E l'ensemble $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On le munit du produit scalaire

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire. On s'autorise à identifier polynômes et fonctions polynomiales.
1) Rappeler comment le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire à partir de la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale (P_n) telle que pour tout n P_n soit unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n.
2) Déterminer les trois premiers polynômes de cette suite.
3) Montrer qu'il existe une unique suite orthogonale $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynomes telle que pour tout n T_n soit unitaire et de degré n.
4) On pose, pour n entier :

$$Q_n(t)=\frac{d^n}{dt^n}\big(t(1-t)\big)^n=\frac{d^n}{dt^n}R_n(t).$$

Montrer qu'on définit ainsi un polynôme Q_n, dont on précisera le degé et le coefficient dominant.
5) Montrer que la suite (Q_n) est orthogonale.
Indication : On pourra montrer par récurrence que pour tout entier k, $0\leq k\leq n$:

$$(Q_m|Q_n)=(-1)^k\int_0^1\frac{d^k}{dt^k}Q_m(t)\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}R_n(t)\,dt.$$

6) En déduire une relation entre P_n et Q_n.
7) En déduire l'expression de P_n dans la base canonique.

Exercice 3: Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $(u_1,\ldots,u_k)\in E^k$ et $A=(<u_i,u_j>)_{1\leq i,j\leq k}$.
1) Montrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_k)$ est liée alors $\det A=0$.
On note E_k le sous-espace $\mathrm{Vect}\{u_1,\ldots,u_k\}$ et $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_k)$ la valeur de $\det A$. Soit X un élément de E.
2) Montrer qu'il existe un $X_0\in E_k$ tel que $\mathrm{d}(X,E_k)=\|X-X_0\|$. Prouver

$$G(u_1,\ldots,u_k,X)=<X,X-X_0>G(u_1,\ldots,u_k)=\|X-X_0\|^2G(u_1,\ldots,u_k).$$

3) En déduire que $\det A\geq 0$, et que $\det A>0$ si la famille $(u_1,\ldots,u_k)$ est libre.
Indication : Raisonner par récurrence sur k.
4) Si $(u_1,\ldots,u_k)$ est libre alors :

$$\mathrm{d}^2(X,E_k)=\frac{\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_k,X)}{\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_k)}\quad.$$