Partie I : le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 1 : Première démonstration de Cayley-Hamilton.

1) Tout intersection de sous-espaces stables est stable, il suffit de prendre pour F l'intersection de tous les sous-espaces stables par u et contenant x. (Il y en a au moins un : E)

2) (x) est libre car x est non nul
$(x, u(x), \quad , u^n(x))$ est liée car elle contient $n+1$ vecteurs. p existe donc et $p \leq n$.

3) F contient x et est stable par u, il contient donc au moins $x, u(x), \quad$ et $u^{p-1}(x)$. F est un sous-espace vectoriel il contient donc $G = \text{Vect}\{x, \quad , u^{p-1}(x)\}$.
F est le plus petit sous-espace stable contenant x. Pour prouver $F = G$ il suffit de prouver que G est stable par u et contient x.

Or $\forall i \in [0, p-2] \quad u(u^i(x)) = u^{i+1}(x) \in G$
et $u(u^{p-1}(x)) = u^p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) \quad \in G$
(ce dernier point résulte de ce que $(x, u(x), \quad , u^{p-1}(x))$ est libre et $(x, \quad , u^p(x))$ liée, donc $u^p(x)$ est une combinaison linéaire de $x, u(x), \dots,$ et $u^{p-1}(x)$).

Donc $\forall i \in [0, p-1] \quad u(u^i(x)) \in G$
par linéarité de u $\quad u(G) \subset G$, et G est bien stable
q.e.d

4) $(x, \quad , u^{p-1}(x))$ est libre par définition de p, elle engendre ~~G~~ G, c'est-à-dire F. C'est bien une base de F.

5) $$M = \begin{pmatrix} 0 & - & \cdots & - & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{u})$$

6) $$\chi_{\tilde{u}} = \begin{vmatrix} X & & & & -a_0 \\ -1 & X & & & \\ & -1 & & & \\ & & & & \\ & & & X & -a_{p-2} \\ & & & -1 & (+X-a_{p-1}) \end{vmatrix}$$

on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \quad + X^{p-1}L_p$

$$\chi_{\tilde{u}} = \begin{vmatrix} 0 & & & & X^p - a_0 - a_1X \quad - a_{p-1}X^{p-1} \\ -1 & X & & & \\ & -1 & X & & \\ & & & & \\ & & & X & -a_{p-2} \\ & & & -1 & (X-a_{p-1}) \end{vmatrix}$$

$$\chi_{\tilde{u}} = (-1)^{p+1}\left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k\right) \begin{vmatrix} -1 & x & \\ & \ddots & \\ 0 & & x \\ & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{p+1}(-1)^{p-1}\left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k\right)$$

$$\underline{\chi_{\tilde{u}} = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k}$$

7) $$\underline{\chi_{\tilde{u}}(\tilde{u})(x) = \left(\tilde{u}^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \tilde{u}^k\right)(x) = u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0}$$

8) $\chi_{\tilde{u}}$ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit donc $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u (Si on complète $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} M & M_2 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ $\underline{\chi_u = \chi_M \chi_{M_1} = \chi_{\tilde{u}} \chi_{M_1}}$).

9) On a $\chi_u = \chi_{\tilde{u}} P$ donc $\chi_u(u) = P(u) \circ \chi_{\tilde{u}}(u)$

et $\underline{\chi_u(u)(x) = P(u)\left(\chi_{\tilde{u}}(u)(x)\right) = P(u)(0) = 0}$

Donc $\forall x \neq 0$ $\chi_u(u)(x) = 0$. Vrai aussi pour $x = 0$

donc $\underline{\chi_u(u) = 0}$