(a)

II.3.b) . Soit $M$ un majorant uniforme de $|\chi_R(x)|$, c'est-à-dire tel que $\forall R \in \mathbb{R}^{*+}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\chi_R(x)| \leq M$.

Alors $\left|(1-\chi_R(x))g_n(x)\left(h'(x) - x\,h(x)\right)\right| \leq (1+M)(\|h'\|_\infty + x\|h\|_\infty)\,g_n(x)$

Or $x \mapsto x^2 g_n(x)$ est intégrable, et $x g_n(x) \underset{\pm\infty}{=} O(x^2 g_n(x))$

Donc $x \mapsto x g_n(x)$ est intégrable.

Puis $x \mapsto (1+M)(\|h'\|_\infty + x\|h\|_\infty)\,g_n(x)$ est intégrable,

puis $x \mapsto (1-\chi_R(x))g_n(x)(h'(x) - x\,h(x))$ est intégrable

et finalement

$$I_{n,R} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1-\chi_R(x))\,g_n(x)\,(h'(x) - x\,h(x))}_{\rho_{n,R}(x)}\,dx \quad \text{existe.}$$

---

$$I_{n,R} = \int_{-\infty}^{-R} \rho_{n,R}(x)\,dx + \int_{R}^{+\infty} \rho_{n,R}(x)\,dx.$$

---

$$|I_{n,R}| \leq \int_{-\infty}^{-R} |\rho_{n,R}(x)|\,dx + \int_{R}^{+\infty} |\rho_{n,R}(x)|\,dx$$

$$\leq 2(1+M)\left\{\int_R^{+\infty} \|h'\|_\infty\, g_n(x)\,dx + \int_R^{+\infty} |x|\,\|h\|_\infty\, g_n(x)\,dx\right\}$$

$$\leq 2(1+M)\left\{\frac{\|h'\|_\infty}{R^2}\int_R^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx + \frac{\|h\|_\infty}{R}\int_R^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx\right\}$$

$$\leq 2(1+M)\left(\frac{\|h'\|_\infty}{R^2} + \frac{\|h\|_\infty}{R}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx}_{M_1 \text{ (indépendant de } n\text{)}}$$

$$|I_{n,R}| \leq 2(1+M)M_1\left(\frac{\|h'\|_\infty}{R^2} + \frac{\|h\|_\infty}{R}\right)$$

---

Or $\lim\limits_{R \to +\infty} 2(1+M)M_1\left(\frac{\|h'\|_\infty}{R^2} + \frac{\|h\|_\infty}{R}\right) = 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_\varepsilon > 0$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall R \geq R_\varepsilon \qquad |I_{n,R}| \leq \varepsilon.$

q.e.d.

On remarquera que l'on a obtenu un résultat bien meilleur que le résultat demandé.

II.3.c) $x \mapsto \chi_R(x)\,(h(x) - x\,h'(x))$ est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. Elle est donc intégrable et bornée et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,\chi_R(x)\,(h'(x) - x\,h(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\chi_R(x)(h'(x) - xh(x))dx.$$

Or $h$ est $\mathcal{C}^1$ et $h$ et $h'$ sont bornées donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,(h'(x) - x\,(h(x)))\,dx = 0$$

Par soustraction il suffit de montrer qu'il existe $R$ tel que

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,(1 - \chi_R(x))\,(h'(x) - x\,h(x))\,dx\right| \leq \varepsilon \qquad (*)$$

C'est le résultat du B en prenant $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = G$

(puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,G(x)\,dx < +\infty$ (car $G(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right)$))

(On rappelle que l'on a obtenu l'existence d'un $R_\varepsilon$ tel que $(*)$ soit vraie pour tout $R \geq R_\varepsilon$ )

II.3.d) Soit $h$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $h$ et $h'$ bornée et soit $R > 0$.

La fonction $h'$ est limite uniforme sur $[-R-1, R+1]$ d'une suite de polynômes $(Q_p)_{p \geq 0}$.

Définissons $P_p$ par $\quad P_p(x) = \displaystyle\int_0^x Q_p(t)\,dt + h(0)$

Alors

$$\forall x \in [-R-1, R+1] \quad P_p(x) - h(x) = \int_0^x \left(Q_p(t) - h'(t)\right) dt.$$

Notons $N_\infty(f) = \sup_{x \in [-R-1, R+1]} |f(t)|$

$$\forall x \in [-R-1, R+1] \quad |P_p(x) - h(x)| \leq |x| \, N_\infty(Q_p - h')$$

puis $\underline{N_\infty(P_p - h) \leq (R+1) \, N_\infty(Q_p - h')}$.

Donc $(P_p)_{p \geq 0}$ converge uniformément vers $h$ et $(Q_p)_{p\geq 0} = (P'_p)_{p \geq 0}$ converge uniformément vers $h'$.

Notons $\underline{u_p(x) = \chi_R(x)\left(Q'_p(x) - x\, Q_p(x)\right)}$

$\underline{u(x) = \chi_R(x)\left(h'(x) - x\, h(x)\right)}$

Puis ~~$\forall x$~~ $\underline{w_p : r \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(x)\, u_p(x)\, dx}$

$\underline{w : r \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(x)\, u(x)\, dx.}$

$$\forall r \quad w_p(r) - w(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(x)\left(u_p(x) - u(x)\right) dx$$

$$= \int_{-R-1}^{R+1} g_r(x)\left(u_p(x) - u(x)\right) dx$$

$$|w_p(r) - w(r)| \leq \int_{-R-1}^{R+1} g_r(x)\, |u_p(x) - u(x)|\, dx$$

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} |w_p(r) - w(r)| \leq N_\infty(u_p - u) \int_{-R-1}^{R+1} g_r(x)\, dx \leq N_\infty(u_p - u) \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(x)\, dx$$

$$\underline{\| w_p - w \|_{\infty, \mathbb{N}} \leq N_\infty(u_p - u).}$$

Par conséquent $\underline{(w_p)_{p \geq 0} \text{ converge uniformément vers } w \text{ sur } \mathbb{N}}$

ⓓ

D'autre part, puisque $u_p$ est ~~est~~ $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

$$\forall p \quad \lim_{n \to +\infty} w_p(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, u_p(x)\, dx.$$

le théorème de permutation des limites, nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} w(n)$ existe et que

$$\lim_{n\to+\infty} w(n) = \lim_{p\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} w_p(x)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \chi_R(x) \left(h'_p(x) - x\, h_p(x)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} w(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \chi_R(x) \left(h'(x) - x\, h(x)\right)$$

(même démonstration que pour la convergence uniforme de $w_p$ vers $w$ en choisissant $g_r = G$ pour tout $n$)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) \chi_R(x) \left(h'(x) - x\, h(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \chi_R(x) \left(h'(x) - x\, h(x)\right)$$

Or d'après le II.f) il existe un $R'_\varepsilon$ tel que

$$\forall R \geq R'_\varepsilon \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \chi_R(x) \left(h'(x) - x\, h(x)\right) \right| \leq \varepsilon$$

(en prenant $g_n = G$ pour tout $n$)

(~~On remarque~~

II.2.e) Soit $h$ de classe $\mathcal{C}^1$, bornée et de dérivée bornée.

Soit $\varepsilon > 0$ et $R = \max(R_\varepsilon, R'_\varepsilon)$ ($R_\varepsilon$ du b). $R'_\varepsilon$ du d))

Alors d'après II.2.b)

$$\left| \lim \int_{-\infty}^{+\infty} q_r(x)\,(1-\chi_R(x))\,(h'(x)-xh(x))\,dx \right| \leq \varepsilon$$

(et cette limite existe)

d'après II.2.d)

$$\left| \lim \int_{-\infty}^{+\infty} q_r(x)\,\chi_R(x)\,(h'(x)-xh(x))\,dx \right| \leq \varepsilon$$

(et cette limite existe).

En utilisant la linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0$

$$\left| \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_r(x)\,(h'(x)-xh(x)) \right| \leq 2\varepsilon$$

Donc $$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_r(x)\,h'(x) - xh(x)\,dx = 0$$