Durée : 4 heures

Cet énoncé de quatre pages est formé d'un problème en deux parties et de deux mini-problèmes.

PROBLÈME

Mines 1989 M (Extrait)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes. On définit, pour tout élément f de E, la norme uniforme notée $\|.\|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel E' de E est dense dans E relativement à la norme $\|.\|_\infty$ si, pour tout élément f de E, il existe une suite (φ_n) d'éléments de E' telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales.

Pour tout $\alpha \geq 0$, on désigne par e_α l'élément de E défini par $e_\alpha(t) = t^\alpha$.

Partie A

Soit F l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. Pour tout élément g de F, on définit la norme uniforme de g par $\|g\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$.

Pour tout entier naturel n, on note T_n le sous-espace vectoriel de F engendré par les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, où les nombres entiers k vérifient $-n \leq k \leq n$.

I.A.1 Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = a_n \left(\cos\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$,

le réel a_n étant tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

(a) Montrer que φ_n est un élément de T_n.

(b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geq 1-\sin u$.

En déduire que, pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{n+1}$, puis que $a_n \leq \dfrac{n+1}{4}$.

(c) Soit δ un réel tel que $0<\delta<\pi$; montrer : $\lim_{n\to+\infty} \sup_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t) = 0$.

I.A.2 Soit g un élément de F. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)g(u-t)\ \mathrm{d}t.$$

(a) Établir la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

En déduire que Q_n appartient à T_n.

(b) Soit toujours δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer l'inégalité :

$$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t|\leq\delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t).$$

(c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

(d) On suppose que g est une fonction paire ; montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n, tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.

I.A.3 Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. On prolongera f en une fonction paire, notée $\widetilde{f}$, et on introduira $g(u) = \widetilde{f}(\cos u)$.
En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans E relativement à la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

Partie B

I.B.1 On se propose de prouver que le sous-espace vectoriel W de E engendré par $e_0, e_2, e_4, \ldots, e_{2k}, \ldots$ est également dense dans E relativement à la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

(a) Soit ψ la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $\psi(u) = 1 - \sqrt{1-u}$. Écrire le développement en série entière de ψ sur $]-1, 1[$: $\psi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n u^n$.

(b) Montrer que la suite $(n^{3/2} b_n)$ admet une limite finie strictement positive lorsque n tend vers $+\infty$. À cet effet, on posera $c_n = \ln\big((n^{3/2} b_n\big)$ et on étudiera la série de terme général $c_{n+1} - c_n$.
En déduire que la série de terme général $b_n u^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$

(c) Prouver que e_1 est limite d'une suite d'éléments de W pour la norme $\|.\|_\infty$.On observera que, sur $[0, 1]$, $t = \sqrt{1 - (1 - t^2)}$.

(d) En déduire que W est dense dans E relativement à la norme $\|.\|_\infty$.

FIN DU PROBLÈME

PS : pour information, cet extrait représentait en gros la moitié de l'épreuve 1989. La deuxième moitié à été reprise, avec de légères modifications pour constituer une des épreuves du concours Mines-Ponts 2009.

Problème II

Centrale-Supélec 1998 MP développe le sujet de manière plus approfondie

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, est dite absolument monotone si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées sont positives.

On se propose de démontrer qu'une fonction absolument monotone sur l'intervalle $]-r,r[$ est développable en série entière, de rayon de convergence au moins égal à r.

II.1 Pour l'instant on suppose seulement f absolument monotones sur $[0,r[$.

(a) Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour f en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(f,x)$$

en exprimant $R_n(f,x)$ sous la forme d'une intégrale.

(b) En déduire que pour x dans $[0,r[$ la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente et que sa somme $g(x)$ vérifie $g(x) \leq f(x)$. Vérifier de plus que pour tout x dans $[0,r[$ la suite $(R_n(f,x))_{n\geq 0}$ est bornée et positive.

(c) En ramenant l'intégrale $R_n(f,x)$ à une intégrale sur $[0,1]$ par un changement de variable linéaire, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{n+1}} R_n(f,x)$ est croissante sur $]0,r[$, c'est-à-dire que si x et y sont tels que $0 < x < y < r$ alors

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} R_n(f,x) \leq \frac{1}{y^{n+1}} R_n(f,y).$$

(d) En déduire que pour tout x de $]0,r[$ la suite $(R_n(f,x))_{n\geq 0}$ tend vers 0. Conclure.

II.2 On suppose maintenant que f est absolument monotone sur $]-r,r[$.

On définit deux fonctions g et h sur $[0,r[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$.

(a) Montrer que g et h sont absolument monotones sur $[0,r[$.

(b) En déduire que f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

II.3 On va appliquer ces résultats à la fonction tan.

(a) Montrer que tan est absolument monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Indication : On pourra montrer que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$ où P_n est un polynôme.

(b) En déduire que tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Problème III

Exercice d'oral E.N.S. 2016

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On appelle ordre de f l'élément de $[0, +\infty]$

$$\rho(f) = \inf \left\{ A \in \mathbb{R}^+ ; \exists r_0 \geq 0 \quad \forall r \geq r_0 \quad M(r) \leq e^{r^A} \right\}, \text{ où } M(r) = \sup_{z, |z|=r} |f(z)|.$$

(La borne inférieure de $\emptyset$ vaut $+\infty$.)

III.1 Déterminer $\rho(f)$ si f est polynomiale.

III.2 Soit q dans $\mathbb{N}$. construire f d'ordre q.

III.3 Donner f d'ordre $+\infty$ (en justifiant bient que cette fonction est développable en série entière).

III.4 Quel est l'ordre de la fonction

$$\sin : z \mapsto \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

III.5 On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ le développement de f en série entière.

(a) Montrer que pour tout n et tout $r > 0$: $|a_n| \leq M(r) r^{-n}$.

(b) *Attention ! Question assez délicate.* On suppose $\rho(f) > 0$ et tous les a_n non nuls, montrer que :

$$\frac{1}{\rho(f)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \left(-\frac{\ln |a_n|}{n \ln n} \right),$$

où pour une suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels admettant au moins une valeur d'adhérence $\liminf u_n$ désigne la plus petite de ses valeurs d'adhérence. On admettra pour l'instant que le nombre $\ell = \liminf_{n \to +\infty} u_n$ existe et est caractérisé par : pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de n tels que $u_n < \ell + \epsilon$ et il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n < \ell - \epsilon$.

III.6 (*Ajoutée par votre professeur pour éclaircir la notion de limite inférieure qui n'est pas au programme.*) On se propose de démontrer le résultat admis à la question précédente. Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels minorée.

(a) Montrer que si $u = (u_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$ alors elle possède au moins une valeur d'adhérence, et réciproquement. Par convention on pose $\liminf\limits_{n \to +\infty} = +\infty$ si u tend vers $+\infty$.

On suppose dorénavant que u possède au moins une valeur d'adhérence et on note $\mathcal{A}(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par $v_n = \inf\limits_{p \geq n} u_p$.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par tout élément de $\mathcal{A}(u)$.

(c) En déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

(d) Montrer que ℓ est dans $\mathcal{A}(u)$, qui possède donc un plus petit élément. ℓ s'appelle la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. On définirait de même la limite supérieure par $\limsup\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{p \geq n} u_p \quad (\in \overline{\mathbb{R}})$.

(e) Montrer que ℓ est bien caractérisé par : pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de n tels que $u_n < \ell + \epsilon$ et il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n < \ell - \epsilon$.