

*Grandes déviations*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie I est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes A, B, C, toutes trois utilisées dans la partie II.

**Notations et rappels**

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète réelle et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , suivant toutes la loi de  $X$ . On pose  $S_0 = 0$  et, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Si  $Y$  est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note  $E(Y)$  l'espérance de  $Y$ .

Si  $Y$  est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note  $V(Y)$  la variance de  $Y$ .

Si  $Y$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , on abrège «  $Y$  est d'espérance finie » en «  $E(Y) < +\infty$  ».

Si  $\tau$  est un élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ , on dit que  $X$  vérifie  $(C_\tau)$  si  $E(e^{\tau|X|}) < +\infty$ .

On pourra utiliser la propriété suivante :

$$(P) \quad \text{pour } Z \text{ et } Y \text{ variables aléatoires réelles telles que } 0 \leq Y \leq Z, \quad E(Z) < +\infty \implies E(Y) < +\infty$$

Étant données deux variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on dit que  $Y$  est *presque sûrement* égale à  $Z$  lorsque  $P(Y = Z) = 1$ .

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{N}^*$  disjoints. Alors toute variable aléatoire fonction des  $Y_n, n \in A$  est indépendante de toute variable aléatoire fonction des  $Y_n, n \in B$ .

**I Premiers résultats****I.A – Une classe de variables aléatoires**

**I.A.1)** Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  possédant un moment d'ordre 2 et telles que  $V$  n'est pas presque sûrement nulle. Montrer que  $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geq 0$  et que  $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda V + U$  est presque sûrement nulle.

**I.A.2)**

a) On suppose que  $X$  est bornée. Justifier que  $X$  vérifie  $(C_\tau)$  pour tout  $\tau$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

b) On suppose que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels  $t$  tels que  $E(e^{tX}) < +\infty$  ? Pour ces  $t$ , donner une expression simple de  $E(e^{tX})$ .

c) On suppose que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels  $t$  tels que  $E(e^{tX}) < +\infty$  ? Pour ces  $t$ , donner une expression simple de  $E(e^{tX})$ .

**I.A.3)** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On suppose  $E(e^{aX}) < +\infty$  et  $E(e^{bX}) < +\infty$ .

a) Montrer  $\forall t \in [a, b], e^{tX} \leq e^{aX} + e^{bX}$ . En déduire  $E(e^{tX}) < +\infty$ .

Que peut-on en déduire sur l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}; E(e^{tX}) < +\infty\}$  ?

b) Soient  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $t$  dans  $]a, b[$ . On note  $\theta_{k,t,a,b}$  la fonction  $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y^k e^{ty}}{e^{ay} + e^{by}}$ .

Déterminer les limites de  $\theta_{k,t,a,b}$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Montrer que cette fonction est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que  $E(|X|^k e^{tX}) < +\infty$ .

d) On reprend les notations de la question b). Soient  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $c$  et  $d$  deux réels tels que  $a < c < d < b$ . Montrer qu'il existe  $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $t \in [c, d]$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}$  :  $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq M_{k,a,b,c,d}$ .

**I.A.4)** Dans cette question,  $\tau$  est un élément de  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $X$  vérifie  $(C_\tau)$ .

a) Montrer que l'ensemble des réels  $t$  tels que  $E(e^{tX}) < +\infty$  est un intervalle  $I$  contenant  $[-\tau, \tau]$ .

Pour  $t$  dans  $I$ , on note  $\varphi_X(t) = E(e^{tX})$ .

b) Montrer que si  $X(\Omega)$  est fini,  $\varphi_X$  est continue sur  $I$  et de classe  $C^\infty$  sur l'intérieur de  $I$ .

c) On suppose maintenant que  $X(\Omega)$  est un ensemble infini dénombrable. On note  $X(\Omega) = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$  où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = P(X = x_n)$ .

En utilisant les résultats établis à la question I.A.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que  $\varphi_X$  est continue sur  $I$  et de classe  $C^\infty$  sur l'intérieur de  $I$ .

d) Vérifier que pour  $t$  dans l'intérieur de  $I$  et  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$ .

e) Soit  $\psi_X = \frac{\varphi_X'}{\varphi_X}$ .

Montrer que  $\psi_X$  est croissante sur  $I$  et que, si  $X$  n'est pas presque sûrement égale à une constante,  $\psi_X$  est strictement croissante sur  $I$ .

### **I.B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

On suppose que  $X$  admet un moment d'ordre 2.

**I.B.1)** Soit  $\delta$  un élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ . Montrer que, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,

$$P(|S_n - nE(X)| \geq n\delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

**I.B.2)** Si  $u$  et  $v$  sont deux nombres réels tels que  $u < E(X) < v$ , déterminer la limite de la suite  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = P(nu \leq S_n \leq nv)$$

### **I.C – Suites sur-additives**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle telle que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \geq u_m + u_n$ .

On suppose que l'ensemble  $\left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$  est majoré et on note  $s$  sa borne supérieure.

**I.C.1)** Soient  $m, q$  et  $r$  des éléments de  $\mathbb{N}$ . On pose  $n = mq + r$ . Comparer les deux nombres réels  $u_n$  et  $qu_m + u_r$  et montrer que  $u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs$ .

**I.C.2)** On fixe  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . En utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , montrer qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ ,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

**I.C.3)** Montrer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = s$ .

## **II Le théorème des grandes déviations**

Soit  $a$  un nombre réel.

### **II.A – Exposant des grandes déviations**

**II.A.1)** Montrer  $P(X \geq a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geq na) = 0$ .

**II.A.2)** Soient  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $S_{m+n} - S_m$  et  $S_n$  ont même loi.

b) Soit  $b$  un nombre réel. Montrer  $P(S_{m+n} \geq (n+m)b) \geq P(S_n \geq nb) P(S_m \geq mb)$ .

On suppose dans toute la suite du problème  $P(X \geq a) > 0$ .

**II.A.3)** Montrer que la suite  $\left( \frac{\ln(P(S_n \geq na))}{n} \right)_{n \geq 1}$  est bien définie et admet une limite  $\gamma_a$  négative ou nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que  $X$  vérifie  $(C_\tau)$  pour un certain  $\tau > 0$  et n'est pas presque sûrement constante. On suppose également que  $a$  est strictement supérieur à  $E(X)$ .

On se propose d'établir que  $\gamma_a < 0$  (ce qui montre que la suite  $(P(S_n \geq na))_{n \geq 1}$  converge géométriquement vers 0) puis de déterminer  $\gamma_a$ .

### II.B – Majoration des grandes déviations

L'intervalle  $I$  et la fonction  $\varphi_X$  sont définis comme dans la question I.A.4.

**II.B.1)** Montrer que, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $t$  dans  $I \cap \mathbb{R}^+$

$$E(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n, \quad P(S_n \geq na) \leq \frac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$$

**II.B.2)** On définit la fonction  $\chi : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{cases}$

a) Montrer que la fonction  $\chi$  est minorée sur  $I \cap \mathbb{R}^+$ .

On note  $\eta_a$  la borne inférieure de  $\chi$  sur  $I \cap \mathbb{R}^+$ .

b) Donner un équivalent de  $\chi(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0. En déduire  $\eta_a < 0$ .

c) Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \geq na) \leq e^{n\eta_a}$ .

En déduire que  $\gamma_a < 0$ .

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels  $a$  vérifiant les conditions  $P(X \geq a) > 0$  et  $a > E(X)$ ; puis, pour  $a$  vérifiant ces conditions, calculer  $\eta_a$ .

i.  $X$  suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  avec  $0 < p < 1$ .

ii.  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ .

### II.C – Le théorème de Cramer

On suppose ici que la borne inférieure  $\eta_a$  de la fonction  $\chi$  sur  $I \cap \mathbb{R}^+$  est atteinte en un point  $\sigma$  intérieur à  $I \cap \mathbb{R}^+$ .

Soient  $t$  un nombre réel intérieur à  $I$  et tel que  $t > \sigma$ ,  $b$  un nombre réel tel que  $b > \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}$ .

**II.C.1)**

a) Calculer  $\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tx}}{E(e^{tX})} P(X = x)$ .

On admet alors (quitte à modifier  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ )

– qu'il existe une variable aléatoire  $X'$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que  $X'(\Omega) = X(\Omega)$  et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X' = x) = \frac{e^{tx}}{E(e^{tX})} P(X = x)$$

– qu'il existe une suite  $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  suivant toutes la même loi que  $X'$ .

b) Montrer

$$E(X') = \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}, \quad E(X') > a$$

**II.C.2)** On admet que, si  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et si  $f$  est une application de  $X(\Omega)^n$  dans  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$E(f(X'_1, \dots, X'_n)) = \frac{E(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

a) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $S'_n = \sum_{k=1}^n X'_k$ . Montrer  $P(na \leq S'_n \leq nb) \leq P(S_n \geq na) \frac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$ .

On pourra introduire l'application  $f : \begin{cases} X(\Omega)^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } na \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

b) En utilisant les questions I.B.2, II.B.2c et le a) ci-dessus, montrer finalement que  $\eta_a = \gamma_a$ .

**II.C.3)** Dans cette question on pourra utiliser les résultats du II.B.2d.

a) Soit  $\alpha$  dans  $]0, 1/2[$ . Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$A_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\}, \left| k - \frac{n}{2} \right| \geq \alpha n \right\}, \quad U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite  $(U_n^{1/n})_{n \geq 1}$ .

b) Soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\alpha$  dans  $] \lambda, +\infty[$ . Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq \alpha n}} \frac{n^k \lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite  $(T_n^{1/n})_{n \geq 1}$ .

---

• • • FIN • • •

---