

Exercice 2. * Supposons déjà les x_i strictement positifs. Alors pour tout i il existe y_i dans \mathbb{R} tel que $x_i = e^{y_i}$.

L'inégalité à démontrer devient

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n e^{y_i}} = e^{\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}} \leq \frac{e^{y_1} + \dots + e^{y_n}}{n}$$

Elle est vraie car la fonction exp est convexe (sa dérivée seconde est positive sur \mathbb{R}). Elle résulte de l'inégalité de Jensen.

* Si un des x_i est nul, le membre de gauche est nul, celui de droite positif donc l'inégalité reste vraie.