

Exercice 5:

On utilise la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F , sous-espace de dimension finie de E , convergant dans E vers un élément y . Il s'agit de prouver que y est dans F .

Or $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (dans E) donc bornée.

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée d'éléments de F , qui est de dimension finie.

On peut donc en extraire une suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de F . Cet élément est aussi limite dans E de $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$. Il est donc égal à y . Et par conséquent $y \in F$.

q. e. d.