Concours commun Mines Ponts 2001. ΠP Première épreuve.

Première partie.

I.1a). Si $u(x) = \mu_1 x = \mu_2 x$ alors $(\mu_1 - \mu_2)\cdot x = 0$ donc

$\mu_1 = \mu_2$ $\binom{\text{si}}{\text{car}}$ $x \neq 0$.

I.1b) $u(\alpha x) = \bar{\alpha}\, u(x) = \bar{\alpha}\mu x = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\mu \cdot \alpha x$ si $\alpha \neq 0$.

Donc si μ est valeur copropre $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\mu$ aussi. En choisissant $\alpha = e^{-\frac{i\theta}{2}}$

On obtient : Si μ est valeur copropre pour le vecteur x, $e^{i\theta}\mu$ est valeur copropre pour le vecteur $e^{-\frac{i\theta}{2}}x$

I.1c) – $\forall (x,y)$ $u(x+y) = u(x) + u(y)$ Donc $u(x) = \mu x$ $u(y) = \mu y$ entraine $u(x+y) = \mu(x+y)$. E_μ est stable pour l'addition.

– $0 \in E_\mu$.

– $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$ $\forall x \in E_\mu$. $u(\alpha x) = \bar{\alpha}\, u(x) = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\mu \cdot \alpha x$.

Donc si $\mu \neq 0$ $\alpha x \in E_\mu \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

si $\mu = 0$ $\alpha x \in E_\mu \Leftrightarrow 0 = 0$.

Par conséquent.

| E_μ n'est pas un $\mathbb{C}$ espace vectoriel si $\mu \neq 0$
| E_0 est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. (sev)
| E_μ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour tout μ (sev de l'espace vectoriel réel sous-jacent à E).

I.1d) $u \circ v\,(x+y) = u(v(x) + v(y)) = u(v(x)) + u(v(y)) = u\circ v(x) + u \circ v(y)$

$u \circ v\,(\alpha x) = u(\bar{\alpha}\, v(x)) = \bar{\bar{\alpha}}\, u(v(x)) = \alpha\ u\circ v(x)$.

Donc $u \circ v$ est une application linéaire

I.2.a) Soit $A = (a_{i,j})$ définie par $\forall j$ $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

Alors si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ on aura $u(x) = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j\, u(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\bar{x}_j e_i$

$u(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\bar{x}_j\right) e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ avec

$Y = A\bar{X}$. On remarquera que A est unique. Si une telle matrice existe alors $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ ce qui détermine les $a_{i,j}$

I.2b) Soit X'_x (Y') la matrice des coordonnées de x ($u(x)$) dans la base $(f_i) = \mathcal{B}'$.

On a $X = SX'$, $Y = SY'$, $Y' = B\overline{X'}$, $Y = A\overline{X}$

Donc $SY' = A\overline{S}\overline{X'}$ puis $Y' = S^{-1}A\overline{S}.\overline{X'} = B\overline{X'}$

On a vu dans la question précédente que B était déterminée de manière unique. Donc $\underline{B = S^{-1}A\overline{S}}$

I.3.a) On cherche $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ~~tel que~~ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu X = A\overline{X}$

C'est à dire $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ puis $\begin{cases} -\overline{b} = \mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$

$\begin{cases} -\overline{b} = \mu a \\ a = \overline{\mu}\,\overline{b} \end{cases}$ $\begin{cases} a = \overline{\mu}\, b \\ -\overline{b} = \mu\overline{\mu}\,\overline{b} \end{cases}$ $\begin{cases} a = \overline{\mu}\, b \\ \overline{b}(1+|\mu|^2) = 0 \end{cases}$ donc $\underline{(a,b) = (0,0)}$

<u>A ne possède donc pas de valeur copropre.</u>

I.3b) Si A est dans $M_n(\mathbb{R})$ et possède une valeur propre réelle λ alors il existe $X \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Or $\overline{X} = X$

donc <u>$A\overline{X} = \lambda X$ et λ est valeur copropre de A.</u>

I.4a) Si μ est valeur copropre de A il existe X non nul tel que $A\overline{X} = \mu X$. Or a alors $A\overline{A}X = A(\overline{A\overline{X}}) = A(\overline{\mu}\,\overline{X}) = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = |\mu|^2 X$

Donc <u>$|\mu|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$</u>

I.4b) Soit λ une valeur propre de $A\overline{A}$ appartenant à $\mathbb{R}^+$ (l'écriture $\lambda \geqslant 0$ de l'énoncé n'est pas conventionnelle) et X un vecteur propre associé.

$A\overline{A}X = \lambda X$, $X \neq 0$.

- Supposons <u>X et $A\overline{X}$ liés</u> alors $A\overline{X} = \mu X$ donc $\overline{A}X = \overline{\mu}\,\overline{X}$ et $A\overline{A}X = |\mu|^2 X$

Donc $|\mu|^2 = \lambda$. Donc $\mu = e^{i\theta}\sqrt{\lambda}$ est une valeur copropre de A. D'après I.1b) <u>$\sqrt{\lambda} = e^{-i\theta}\mu$ est aussi valeur copropre de A.</u>

- Si <u>$(X, A\overline{X})$ est libre</u> alors $Y = \sqrt{\lambda}X + A\overline{X} \neq 0$ et $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}A\overline{X} + A\overline{A}X = \sqrt{\lambda}A\overline{X} + \lambda X = \sqrt{\lambda}(A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X) = \sqrt{\lambda}\, Y$. Donc dans ce cas aussi <u>$\sqrt{\lambda}$ est valeur copropre de A</u>

I.4c) - Si $\mu \in \mathbb{R}^+$ est valeur copropre de A alors $\mu^2 = |\mu|^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$ d'après I.4.a)

- Réciproquement si μ^2 est valeur propre de $A\bar{A}$, alors $\mu^2 \in \mathbb{R}^+$ et d'après I.4.b) $\mu = \sqrt{\mu^2}$ est valeur copropre de A.

I.5a). A est triangulaire supérieure, donc $\bar{A}$ aussi, puis $A\bar{A}$. De plus les coefficients diagonaux de A sont les λ_i, $1 \le i \le n$, valeurs propres de A, ceux de $\bar{A}$ les $\bar{\lambda}_i$ et finalement ceux de $A\bar{A}$ les $|\lambda_i|^2$.
les valeurs propres de $A\bar{A}$ sont donc les $|\lambda_i|^2$.
D'après la question précédente les $|\lambda_i|$ sont des valeurs copropres de A et finalement d'après I.1.b) $\forall \lambda \in Sp(A)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$
$e^{i\theta}\lambda = e^{i(\theta + \arg \lambda)}|\lambda|$ est valeur copropre de A.

I.5b). De même si μ est une valeur copropre de A, $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$ (I.4.c) donc il existe λ valeur propre de A telle que $|\mu|^2 = |\lambda|^2$. Donc il existe θ tel que $\mu = e^{-i\theta}\lambda$ ($\lambda = e^{i\theta}\mu$).
En résumé : si A est triangulaire les valeurs copropres de A sont les $e^{i\theta}\lambda$, θ parcourant $\mathbb{R}$ et λ le spectre de A.

I.5c) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ on veut résoudre $A\bar{X} = X$ $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$
(et $X \neq 0$).

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia+b+c-id \\ ic+d \end{pmatrix}.$$

D'où $\begin{cases} c = d \\ b + c = a \\ a - d = b \end{cases}$, qui se résume en $\begin{cases} c = d \\ b = a - d. \end{cases}$

par exemple. $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

(l'ensemble des X tel que $A\bar{X} = X$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

I 6) On sait que μ est valeur coproprе de A ssi seulement si $|\mu|$ est valeur copropre de A. C'est-à-dire ssi il existe $(X_1,X_2)\neq(0,0)$ dans $(\mathbb{R}^n)^2$ tel que $A(X_1 - iX_2) = |\mu|(X_1 + iX_2)$

$$(B+iC)(X_1 - iX_2) = |\mu| X_1 + i|\mu| X_2.$$

$$\begin{cases} BX_1 + CX_2 = |\mu| X_1 \\ CX_1 - BX_2 = |\mu| X_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & -D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Seconde Partie

II.1) $A = I_n A \overline{I_n}^{-1}$ la relation est réflexive

$A = SB\overline{S}^{-1} \Rightarrow B = S^{-1}A\overline{S}$ et $\overline{S} = \overline{S^{-1}}^{-1}$

la relation est symétrique

$A = SB\overline{S}^{-1}$ $B = S'C\overline{S'}^{-1} \Rightarrow A = SS'C\overline{S'}^{-1}\overline{S}^{-1} = SS'C\overline{(SS')}^{-1}$

la relation est transitive.

La relation $\approx$ est bien une relation d'équivalence.

II.2) - Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont des vecteurs copropres associés aux valeurs $\mu_1, \ldots \mu_k$ alors ce sont des vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ qui sont distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants. la famille $(X_1, \ldots, X_k)$ est libre.

- Si $A\overline{A}$ possède n valeurs propre distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ positives ou nulles, d'après I.4B) il existe $(X_1, \ldots, X_n)$ vecteurs copropres associés aux valeurs copropres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. les $|\sqrt{\lambda_i}|^2 = \lambda_i$ sont distincts, donc, d'après la première moitié de la question $(X_1, \ldots, X_n)$ est libre. $\dim E = n$ donc $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de E et A est codiagonalisable

II.3a) $A = S\bar{S}^{-1}$ $\quad A\bar{A} = S\bar{S}^{-1}\bar{S}S^{-1} = SS^{-1} = I_n$.

(Rq on a une nouvelle fois utilisé $(\bar{S})^{-1} = \overline{(S^{-1})}$)

II.3b) Réciproquement soit A telle que $A\bar{A} = I_n$. Soit $S(\theta) = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I_n$.

$$A\overline{S(\theta)} = A(e^{-i\theta}\bar{A} + e^{i\theta}I_n) = e^{-i\theta}I_n + e^{i\theta}A = S(\theta).$$

De plus $\det S(\theta) = (-e^{i\theta})^n \det((-e^{-2i\theta})I_n - A)$

Donc $\det S(\theta) = 0 \iff -e^{-2i\theta} \in Sp(A)$

or $\{-e^{2i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ est infini donc il existe θ_0 tel que

$\det S(\theta_0) \neq 0$ et $S(\theta_0)$ est inversible et :

$$\boxed{A = S(\theta_0)\overline{S(\theta_0)}^{-1}}$$

II.4) $S^{-1}A\bar{S} = D$ donc $A = SD\bar{S}^{-1}$

$\bar{A} = \bar{S}\bar{D}S^{-1}$ et $A\bar{A} = SD\bar{S}^{-1}\bar{S}\bar{D}S^{-1} = SD\bar{D}S^{-1}$

Or si D est diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $\bar{D} = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$

et $\underline{\Delta = D\bar{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)}$.

Puisque $A\bar{A} = S\Delta S^{-1}$ $\underline{A\bar{A} \text{ est diagonalisable et ses valeurs}}$
$\underline{\text{propres sont positives}}$

De plus A et D sont équivalent donc le rang de A est égal au rang de D, lui même égal à $n - \mathrm{card}\{i, \lambda_i = 0\}$ car D est diagonale. De même $A\bar{A}$ est équivalente (ici même semblable) à Δ donc $A\bar{A}$ et Δ ont même rang.

Or $rg(\Delta) = n - \mathrm{card}\{i, |\lambda_i|^2 = 0\} = n - \mathrm{card}\{i, \lambda_i = 0\} = rg\, D$

Donc par transitivité $rg(A) = rg(D) = rg(\Delta) = rg(A\bar{A})$.

II.5a) $B = S^{-1} A \overline{S}$ $\quad \overline{B} = \overline{S}^{-1} \overline{A} S$ $\quad B\overline{B} = S^{-1} A \overline{S}\, \overline{S}^{-1} \overline{A} S = S^{-1} A\overline{A} S$

$B\overline{B} = S^{-1} S \Lambda S^{-1} S = \Lambda$ donc $\underline{B\overline{B} = \Lambda}$.

$\overline{B} B = \overline{\Lambda} = \Lambda$. car Λ est à coefficients réels.

Finalement $\underline{B\overline{B} = \overline{B} B = \Lambda}$.

$B\Lambda = B\overline{B} B$ car $\Lambda = \overline{B} B$ $\qquad \Lambda B = B\overline{B} B$ car $\Lambda = B\overline{B}$

Donc $\underline{B\Lambda = \Lambda B}$

II.5b) Ecrivons la matrice B par blocs $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & & B_{1,k} \\ \vdots & & & \\ B_{k,1} & & & B_{k,k} \end{pmatrix}$

avec $B_{i,j} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{C})$.

Alors $\Lambda B = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & & \lambda_1 B_{1,k} \\ & & \\ \lambda_k B_{k,1} & & \lambda_k B_{k,k} \end{pmatrix}$ et

$$B\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & & \lambda_k B_{1,k} \\ & & \\ \lambda_1 B_{k,1} & & \lambda_k B_{k,k} \end{pmatrix}$$

Donc $\Lambda B = B\Lambda$ implique $\forall i,j \quad \lambda_i B_{i,j} = \lambda_j B_{i,j}$

Or, si $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ Donc $B_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et

$$\underline{B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & B_k \end{pmatrix}} \qquad (\text{où } B_i = B_{i,i})$$

II.5.c Or $B\overline{B} = \Lambda$. Donc $\underline{\forall p \quad B_p \overline{B_p} = \lambda_p I_{n_p}}$.

__Premier cas__ Si $\lambda_p \neq 0$ alors $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} B_p\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} B_p\right)} = I_{n_p}$.

donc il existe, d'après II.3 b), une matrice C_p inversible telle que

$\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} B_p = C_p \overline{C_p}^{-1}$, soit $\underline{B_p = C_p (\sqrt{\lambda_p} I_{n_p}) \overline{C_p}^{-1}}$

Or $rg(B) = rg(A) = rg(A\bar{A}) = rg(\Lambda)$ donc

$$rg(B) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda_k \neq 0 \\ n - n_k & \text{si } \lambda_k = 0 \end{cases}$$

D'autre part

$$rg(B) = rg(B_1) + \dots + rg(B_k)$$
$$= n - n_k + rg(B_k).$$

Par conséquent si $\lambda_k = 0$ $rg(B_k) = 0$ et $B_k = 0$

donc $B_k = I_{n_k} (0 \times I_{n_k}) \bar{I}^{-1}_{n_k}$

Partie difficile de la question. Peut-être le point le plus subtil du problème.

En conclusion $\forall p \in [1, k]$ $\exists C_p \in GL_{n_p}(\mathbb{C})$ $B_p = C_p (\sqrt{\lambda_p} I_{n_p}) \bar{C}_p^{-1}$

Soit $P = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_k \end{pmatrix}$ $P' = \begin{pmatrix} \bar{C}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{C}_k^{-1} \end{pmatrix}$. alors

on vérifie. $P\bar{P'} = I_n$ donc $P' = \bar{P}^{-1}$ (produit par bloc)

De plus $B = P \Delta \bar{P}^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \\ 0 & \sqrt{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix}$ (toujours des produits par blocs)

Or $A = S B \bar{S}^{-1}$ et finalement

$$A = (SP) \Delta (\overline{SP})^{-1} \quad \text{où } \Delta \text{ est diagonale.}$$

Donc A est codiagonalisable.

—

II.4 et II.5 réunies nous donne donc une condition nécessaire et suffisante de codiagonalisabilité de A

$$\begin{cases} - A\bar{A} \text{ est diagonalisable} \\ - Sp(A\bar{A}) \subset \mathbb{R}^+ \\ - rg(A) = rg(A\bar{A}). \end{cases}$$

II.6.a) $A\bar{A} = A^2$ car A est réelle.

A est symétrique donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

$A = PDP^{-1} \quad A^2 = PD^2P^{-1} = A\bar{A}$.

- $Sp(A\bar{A}) = \{\lambda^2, \lambda \in Sp(A)\} \subset \mathbb{R}^+$
- $A\bar{A} = A^2$ est diagonalisable
- $rg(A) = rg(D) = rg(D^2) = (n - card\{i, \lambda_i = 0\}) = rg(A\bar{A})$.

Donc A est codiagonalisable.

II.6.b) + $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ $Sp(A) = \{i\}$ et $A \neq iI_2$ donc A n'est pas diagonalisable

$A\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisable et $Sp(A\bar{A}) = \{1\} \subset \mathbb{R}^+$

$rg(A) = rg(A\bar{A}) = 2$. A est codiagonalisable

+ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_B = X^2 - 2X + 2 = (X-(1-i))(X-(1+i))$ est scindé à racines simples. B est diagonalisable.

$B\bar{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $Sp(B\bar{B}) = Z(X^2+4) = \{2i, -2i\} \not\subset \mathbb{R}^+$

B n'est pas codiagonalisable

+ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Sp(C) = \{0\}$ et $C \neq 0$ donc C n'est pas diagonalisable.

$C\bar{C} = C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(C) \neq rg(C\bar{C})$ donc C n'est pas codiagonalisable

+ $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_D = X^2 - 2X + 2$ D est diagonalisable

$D\bar{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et $Sp(D\bar{D}) \subset \mathbb{R}^+$

et $rg(D) = 2 = rg(D\bar{D})$ D est codiagonalisable

En conclusion : les quatre cas de figure sont possibles il n'y a pas de corrélation entre diagonalisable et codiagonalisable