

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)



Dans tout le problème,  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel *réel* de dimension finie  $n \geq 2$ . Pour tout couple  $(A, B)$  d'endomorphismes de  $\mathcal{E}$ , on note  $AB$  le composé  $A \circ B$ . Pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $A^i$  est l'endomorphisme de  $\mathcal{E}$  défini par récurrence par  $A^{i+1} = A^i A$  avec  $A^0 = I$ , automorphisme identique de  $\mathcal{E}$ ; pour tout polynôme  $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$  d'une variable, à coefficients réels,  $P(A)$  désigne l'endomorphisme

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i.$$

L'image et le noyau de  $A$  sont respectivement notés  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$ . Si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  tel que  $\mathcal{F}$  contienne l'image  $A(\mathcal{F})$  qu'en donne  $A$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est *stable* par  $A$ . Enfin, s'il existe un entier  $q > 0$  tel que  $A^q = 0$ , on dit que  $A$  est *nilpotent* et le plus petit de ces entiers  $q$  s'appelle *indice de nilpoence* de  $A$ .

I

Dans toute cette partie,  $L$  est un endomorphisme nilpotent de  $\mathcal{E}$  et on note  $p$  son indice de nilpotence.

1. **a.** Soit  $i$  un entier positif ou nul. Montrer que l'égalité  $\text{Ker } L^i = \text{Ker } L^{i+1}$  équivaut à l'égalité  $\text{Im } L^i = \text{Im } L^{i+1}$  et qu'elle entraîne  $\text{Im } L^j = \text{Im } L^i$  pour tout  $j \geq i$ .
  - b.** Montrer que si  $\text{Ker } L^i$  est différent de  $\mathcal{E}$ , alors il est aussi différent de  $\text{Ker } L^{i+1}$ .
  - c.** Montrer que la dimension du noyau de  $L^i$  croît strictement avec l'exposant  $i$  sur l'ensemble des entiers de l'intervalle  $[0, p]$ . En déduire que  $L^n = 0$ , et que, si  $p = n$ , la dimension du noyau de  $L^i$  est égale à  $i$  pour tout entier  $i$  de l'intervalle  $[0, n]$ .
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier  $h$  de l'intervalle  $[1, n-1]$  tel que  $L^h$  soit de rang  $n-h$ .
  - a.** Établir que pour tout entier  $j$  de  $[1, h]$ , le rang de  $L^j$  est  $n-j$ .
  - b.** Pour tout entier  $i \geq 0$ , établir une relation entre les dimensions des sous-espaces  $\text{Im } L^i$ ,  $\text{Im } L^{i+1}$  et  $\text{Im } L^i \cap \text{Ker } L$ .
  - c.** Quel est l'indice de nilpotence de  $L$ ?
3. Dans cette question, on suppose le rang de  $L$  égal à  $n-1$ .
  - a.** Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  stable par  $L$  et de dimension  $r \geq 1$ ; on note  $M$  la restriction de  $L$  à  $\mathcal{F}$ .  
Montrer que pour tout entier  $j$  de  $[1, r]$ , les noyaux de  $L^j$  et de  $M^j$  sont égaux. Quel est le noyau de  $L^r$ ?
  - b.** Caractériser les sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{E}$  stables par  $L$  à l'aide des noyaux des endomorphismes  $L^i$ .

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple  $(A, B)$  d'endomorphisme de  $\mathcal{E}$ , on note  $[A, B]$  l'endomorphisme  $AB - BA$ .

Dans cette partie II,  $A$  et  $B$  sont des endomorphismes *non nuls* de  $\mathcal{E}$  et  $\alpha$  un réel *non nul* tels que

$$[A, B] = \alpha B.$$

1. **a.** Pour tout triplet  $(U, V, W)$  d'endomorphismes de  $\mathcal{E}$ , vérifier l'égalité
 
$$[U, VW] = [U, V]W + V[U, W].$$
- b.** Soient  $P$  un polynôme d'une variable à coefficients réels et  $P'$  son polynôme dérivé. Établir l'égalité
 
$$[A, P(B)] = \alpha BP'(B)$$
 et en déduire que, pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $\text{Ker } B^k$  est stable par  $A$ .
- c.** Établir l'existence d'un polynôme  $P$  non nul tel que  $P(B) = 0$  et montrer que  $B$  est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme  $dP_n(B) - BP'_n(B)$  où  $P_n$  est un polynôme non nul de degré minimal  $d$  tel que  $P_n(B) = 0$ ).
2. Dans cette question, on suppose que le rang de  $B$  est  $n - 1$ .
  - a.** Quel est le rang de  $B^{n-1}$ ? Comment peut-on choisir  $x$  dans  $\mathcal{E}$  de façon qu'en posant  $x_k = B^{n-k}(x)$  pour tout entier  $k$  de  $[1, n]$ , la famille  $(x_1, \dots, x_k)$  soit, pour tout  $k$ , une base de  $\text{Ker } B^k$ ?
  - b.** Montre que  $x_1$  est un vecteur propre de  $A$ , dont on notera  $\lambda$  la valeur propre associée. Quelle est la forme de la matrice de  $A$  relative à la base  $(x_1, \dots, x_n)$ ? En déduire en particulier que  $\lambda - (n - 1)\alpha$  est une valeur propre de  $A$ .
  - c.** Montrer que si  $x$  est un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur  $\mu$ ,  $B(x)$  est un vecteur nul ou un vecteur propre de  $A$ , dont on précisera la valeur propre associée.
  - d.** Soit  $e_n$  un vecteur de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda - (n - 1)\alpha$ ; pour tout entier  $k$  de  $[1, n]$ , on pose  $e_k = B^{n-k}(e_n)$ . Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathcal{E}$  dans laquelle  $A$  se diagonalise et rappeler les expressions des matrices de  $A$  et  $B$  relatives à cette base.

### III

Dans cette partie,  $A, B, C$  sont trois endomorphismes *non nuls* de  $\mathcal{E}$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels *non nuls* tels que

$$[A, B] = \alpha B, [A, C] = \beta C, [B, C] = A.$$

1. Calculer la valeur de  $(\alpha + \beta)[B, C]$  et en déduire que  $\alpha$  et  $\beta$  sont nécessairement opposés.
2. Dans cette question, on suppose que le rang de  $B$  est  $n - 1$ .
  - a.** Trouver numériquement la somme des valeurs propres de  $A$  et en déduire ces valeurs propres. Quel est, en fonction de  $n$ , le rang de  $A$ ?
  - b.** Calculer explicitement la matrice de  $C$  relative à la base de  $\mathcal{E}$  définie dans la question **II.2.d** et vérifier que les endomorphismes  $A, B, C$  ainsi déterminés par leurs matrices satisfont aux conditions imposées au début de cette partie **III**. Quel est le rang de  $C$ ?
  - c.** Montrer que  $\{0\}$  et  $\mathcal{E}$  sont les seuls sous-espaces de  $\mathcal{E}$  stables à la fois par  $A, B$  et  $C$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 2$  et que  $\{0\}$  et  $\mathcal{E}$  sont les seuls sous-espaces de  $\mathcal{E}$  stables à la fois par  $A, B$  et  $C$ ; aucune hypothèse n'est faite sur le rang de  $B$ .
  - a.** Pour tout entier  $i \geq 1$ , établir l'égalité
 
$$[B, C] = iC^{i-1}(A - (i - 1)I)$$
 et en déduire l'existence d'une valeur propre de  $A$ .
  - b.** Montrer que  $A$  est diagonalisable et que  $B$  est de rang  $n - 1$ .