ENS MP 2014 MATHEMATIQUES D

Partie I.

I.1) $\Omega_n = \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ donc $\underline{P_- \leq P}$

$\forall i \quad P_i = \bigcup_{j \in P_i} \{j\}$ donc $\underline{P \leq P_+}$

I.2) i) => ii).

Supposons $P \leq Q$ et soit i, j tels que $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$

On a $P_i = \bigcup_{k \in J_i} Q_k$, or $P_i \cap Q_j \neq 0$ donc il existe k tel que $Q_k \cap Q_j \neq \emptyset$ donc $Q_k = Q_j$ et $Q_j \subset P_i$

ii) => i

Supposons $Q_j \cap P_i \neq \emptyset \Rightarrow Q_j \subset P_i$ c'est-à-dire

$Q_j \cap P_i \neq \emptyset \Rightarrow Q_j \cap P_i = Q_j$

Or $P_i = P_i \cap (\bigcup_j Q_j) = \bigcup_j P_i \cap Q_j = \bigcup_{j \in J_i} Q_j$

I.3a) On a clairement $P_i = \bigcup_{P_j \cap P_i \neq \emptyset} P_j$ donc $\underline{P \leq P}$

Si $P \leq Q$ et $Q \leq P$. Soit (i, j) tel que $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$

alors $P_i = Q_j \cup \bigcup_j Q_j$ donc $Q_j \subset P_i$ de même $P_i \subset Q_j$

Donc $P_i = Q_j$. et par conséquent $\underline{P = Q}$

Si $P \leq Q$ et $Q \leq R$ alors $\underline{P \leq R}$ (associativité de la réunion)

I.3b - Si $n \geq 3$ $\{\{1\}, \{2, 3\}, \ldots n\}\}$ et $\{\{1, 2\}, \{3, \ldots n\}\}$ sont deux partitions qui ne sont pas comparables donc $\leq$ n'est pas une relation d'ordre total.

- Si $n = 1$ la seule partition est $\{\{1\}\}$ $\leq$ est d'ordre total

- Si $n = 2$ les deux seules partitions sont P_+ et P_- et puisque $P_- \leq P_+$, $\leq$ est d'ordre total.

I.4) Soit $E = (R_k)_{1 \leq k \leq v}$ où $R_k = \{ P_i \cap Q_j \, ; \, P_i \cap P_j \neq \emptyset \}$

On a $P \leq E$ car. $P_i = \bigcup_j P_i \cap Q_j = \bigcup_{P_i \cap Q_j \neq \emptyset} P_i \cap Q_j = \bigcup_{k \in J_i} R_k$

et de même $Q \leq E$.

Si de plus $P \leq F$ et $Q \leq F$ alors

$\forall i \quad F_i = \bigcup_{P_j \cap F_i \neq 0} P_j = \bigcup_{P_j \cap F_i \neq \emptyset} (P_j \cap \Omega_n)$

$= \bigcup_{P_j \cap F_i \neq \emptyset} \bigcup_{P_j \cap Q_k \neq \emptyset} P_j \cap Q_k$

$F_i = \bigcup_{R_e \cap F_i \neq \emptyset} R_e$

car $R_e \cap F_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists (j,k) \; (P_j \cap Q_k) \cap F_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists j \; P_j \cap F_i \neq 0 \; \exists k \; P_j \cap Q_k \neq \emptyset$

et réciproquement car

$F_i = F_i \cap \Omega_n \cap \Omega_n = \bigcup_{j,k} (F_i \cap P_j \cap Q_k)$.

Donc $E \leq F$

Partie II

II.1 a). Si $\sigma \in S_{n,P}$ il existe i tel que $a \in P_i$ (car P est une partition) $\sigma(P_i) \subset P_i$ donc $b = \sigma(a) \in P_i$

- Réciproquement Si il existe i tel que $(a,b) \in P_i^2$. Alors puisque σ est l'identité sur $\{1, \ldots, n\} - \{a,b\}$. On a $\sigma(P_j) = P_j$ pour $j \neq i$ (car $\forall x \in P_j \; \sigma(x) = x$). et $\sigma(P_i) = P_i$ car $\sigma(a) = b$ $\sigma(b) = a$ et $\sigma(x) = x$ si $x \in P_i - \{a,b\}$. Donc $\sigma \in S_{n,P}$.

II.1.b) Notons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. Alors $\sigma \mapsto (\sigma_{|P_i})_{1 \leq i \leq D}$ est clairement un isomorphisme de $S_{n,P}$ sur $\prod_{i=1}^{D} \mathcal{S}(P_i)$

Or $\mathcal{S}(P_i)$ est isomorphe à $S_{|P_i|}$, donc $S_{n,P}$ est isomorphe à $S_{|P_1|} \times \cdots \times S_{|P_D|}$

II.2a) Si $P \leq Q$ et $\sigma \in S_{n,Q}$ alors

$$\forall i \quad \sigma(P_i) = \sigma\Big(\bigcup_{j\in J_i} Q_j\Big) = \bigcup_{j\in J_i} \sigma(Q_j) = \bigcup_{j\in J_i} Q_j = P_i$$

donc $\sigma \in S_{n,P}$: $\underline{P \leq Q \Rightarrow S_{n,Q} \subset S_{n,P}}$

- Supposons $S_{n,Q} \subset S_{n,P}$.

Soit i, j avec $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$.
Soit $a \in P_i \cap Q_j$ et $b \in Q_j$, alors d'après II.1.a $\tau(a,b) \in S_{n,Q}$
donc $\tau \in S_{n,P}$ donc $\tau(a) = b \in Q_i$ et finalement $Q_j \subset P_i$

Donc $P_i \cap Q_j \neq \emptyset \Rightarrow Q_j \subset P_i$ et !
$\underline{S_{n,Q} \subset S_{n,P} \Rightarrow P \leq Q}$

II.2.b) $\underline{P = Q \Leftrightarrow P \leq Q \text{ et } Q \leq P \Leftrightarrow S_{n,Q} \subset S_{n,P} \text{ et } S_{n,P} \subset S_{n,Q} \Leftrightarrow S_{n,P} = S_{n,Q}}$.

II.3) $S_{n,P} \cap S_{n,Q} = \{\sigma \in S_n,\ \forall i\ \sigma(P_i) = P_i \quad \forall j\ \sigma(Q_j) = Q_j\}$ (*)

$= \{\sigma \in S_n,\ \forall i,j\ \sigma(P_i \cap Q_j) = P_i \cap Q_j\}$ (**)

$S_{n,P} \cap S_{n,Q} = \{\sigma \in S_n,\ \forall i,j\ P_i \cap P_j \neq \emptyset\ \ \sigma(P_i \cap Q_j) = P_i \cap Q_j\}$

$\underline{S_{n,P} \cap S_{n,Q} = S_{n,P \wedge Q}}$

Justifions (**). Il est clair que (*) implique (**) car σ étant bijective : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ $\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$.
(**) $\Rightarrow$ (*) car $P_i = \bigcup_j (P_i \cap Q_j)$ donc $\sigma(P_i) = \bigcup_j \sigma(P_i \cap Q_j)$.

II.4) S_n ne possédant qu'un nombre fini de sous-groupes on peut supposer qu'on s'intéresse à une intersection finie de sous groupes paraboliques. Le résultat se prouve alors par récurrence sur le nombre de sous-groupes en utilisant la question précédente.

II.5 a) Il existe au moins un sous-groupe parabolique contenant H, c'est S_n. D'après la question précédente l'intersection de tous les sous-groupes paraboliques contenant H est un sous-groupe parabolique. c'est le plus petit sous-groupe contenant H, parabolique.

II 5.b) Soit i et p dans P_i. Notons $P_{i,p} = \{h(p),\ h \in H\}$.

$H \subset S_N(H) = S_n(P(H))$ donc $\forall h \in H \quad h(p) \in P_i$ et $P_{i,p} \subset P_i$

Si $P_{i,p} \subsetneq P_i$. Soit $P'_{i,p} = P_i - P_{i,p}$..

On a $\forall h' \in H \quad h'(P_{i,p}) = P_{i,p}$. (car $\{h'h,\ h \in H\} = H$)

de même, puisque h' est une bijection vérifiant $h'(P_i) = P_i$, on a $\forall h' \in H \quad h'(P'_{i,p}) = P'_{i,p}$.

Donc si $P' = (P(H) - \{P_i\}) \cup \{P_{i,k}, P'_{i,p}\}$. on a

$H \subset S_{n,P'} \subsetneq S_{n,P(H)}$ ce qui est contradictoire.

Donc $P_{i,p} = P_i$ q.e.d.

II.5c) Supposons que c soit le cycle $c = (i_1, \ \ , i_s)$ alors

$P(H) = \{\{i_1, \ \ , i_s\}\} \cup \{\{i\},\ i \notin \{i_1, \ \ , i_s\}\}$.

II. 6a) D'après la question précédente si σ est un cycle de longueur n $P(H(\sigma)) = \{\{i_1, \ \ , i_n\}\} = \{\{1, \ \ n\}\} = P\_$

. Réciproquement supposons $P(H(\sigma)) = P\_$.. Alors. $\Omega_n = \{\sigma^k(1),\ k \in \mathbb{Z}\}$ donc σ est un cycle. (car $\{\sigma^k(1), k \in \mathbb{Z}\} = \{1, \sigma(1), \ \ , \sigma^{(p-1)}(1)\}$ où $\sigma^p(1) = 1$ et p minimal, et donc ici égal à n.)

II. 6b) Si $P(H) = \{P_1, \ \ , P_s\}$. D'après le raisonnement du 6a), si ~~on dans H~~ σ ~~il~~ induit un cycle sur P_i, de support P_i

Donc σ se décompose en produit de cycles disjoints, dont les support sont les P_i

II.7b) $f(\sigma)f(\sigma') = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}\right)_{i,j=1,\dots,n}$.

$f(\sigma)f(\sigma') = \left(\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}\right)_{i,j=1,\dots,n}$.

$\underline{f(\sigma)f(\sigma') = f(\sigma\sigma')}$ f est un morphisme de S_n dans $GL_n(\mathbb{C})$

(On arrive bien dans $GL_n(\mathbb{C})$ car $f(\sigma)f(\sigma^{-1}) = f(I_d) = I_n$, donc $f(\sigma)$ est inversible d'inverse $f(\sigma^{-1})$. (Pour des matrices carrées l'inverse à droite suffit !

II.7c) det est un morphisme de groupe, donc ε est bien un morphisme de groupe.

Si σ est une transposition $\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(Id) = 1 = (\varepsilon(\sigma))^2$ donc $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$. Comme toute permutation est un produit de transposition. $\forall \sigma \in S_n$ $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

$\varepsilon((1,2)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} = -1$ $\det(Id) = 1$.

Donc $\underline{\varepsilon(S_n) = \{-1, 1\}}$.

II.8.a) Si les cycles c_k sont $(i_{k,1}, \ , i_{k,l_k})$ avec $l_k \geq 2$.

et si $(i_{j_1}, \ , i_{j_{n-(l_1+ \ +l_s)}})$ sont les éléments laissés invariants par σ. Alors la matrice de $f(\sigma)$ (Voir note) dans la base $(e_{i_{1,1}}, \ , e_{i_{1,l_1}}, e_{i_{2,1}}, \ , e_{s,1}, \dots, e_{s,l_s}, e_{i_{j_1}}, \dots, e_{i_{j_{n-(l_1+\dots+l_s)}}})$

est diagonale par blocs $\begin{pmatrix} M_{l_1} & & \\ & M_{l_s} & \\ & & I_{n-(l_1+ \ +l_s)} \end{pmatrix}$

où $M_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $\chi_{M_l} = T^l - 1$ (faire $L_n \leftarrow T^{n-1}L_1 + T^{n-2}L_2 + \dots + L_n$ et développer par rapport à la première colonne)

Note : En fait la matrice de $X \mapsto f(\sigma)X$. $(e_1, \ , e_n)$ est la base canonique) le polynôme caractéristique de $f(\sigma)$ est donc bien

$$(T-1)^{n-(l_1+\dots+l_s)} \prod_{i=1,\dots,s} (T^{l_i}-1).$$

Son coefficient constant est $(-1)^n \det f(\sigma) = (-1)^n \varepsilon(\sigma)$.

On en déduit $\underline{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{l_1+\dots+l_s-s}}$

<u>8b)</u> Le polynôme caractéristique de chaque M_l est scindé à racines simples donc chaque M_l est diagonalisable. Par conséquent ~~M~~ $f(\sigma)$ est diagonalisable. (On peut aussi remarquer que $f(\sigma)$ est annulé par le polynôme $T^{n!}-1$, scindé à racines simples, car $(f(\sigma))^{n!} = f(\sigma^{n!}) = f(Id) = I_n$.).

le polynôme minimal de $f(\sigma)$ est donc $\prod_{\lambda \in Sp(f(\sigma))} (X-\lambda)$

Plus précisément $\underline{\Pi_{f(\sigma)} = \prod (X-\varepsilon)}$ où ε est une racine l_i-ième pour un i dans $1,\dots,s$, ou $\varepsilon = 1$.

Partie III

<u>1)</u> G ne possède qu'un nombre fini de sous-groupes, donc qu'un nombre fini de sous-groupes H' avec $H \subset H' \subsetneq G$ (et au moins ~~un~~ un : H). <u>Un tel H' de cardinal maximal</u> sera un sous-groupe maximal contenant H.

<u>2)</u> Si $s \geq 3$ soit τ <u>une ~~t~~transposition</u> permutant un élément de P_1 avec un élément de P_2. τ n'est pas dans $S_{n,p}$ donc $S_{n,p} \subsetneq \langle S_{n,p}, \tau \rangle$ et $\langle S_{n,p}, \tau \rangle \neq S_n$ car tous les éléments de $\langle S_{n,p}, \tau \rangle$ laissent P_3 globalement invariant.

2.b) Supposons $n \geq 3$ si $n = 2|P_1|$ alors $|P_1| = |P_2|$.

Soit σ un produit de transpositions échangeant un élément de P_1 avec un élément de P_2 (avec $\sigma(P_1) = P_2$ or alors $\sigma^2(P_2) = P_1$.) alors $\langle S_{n,p}, \sigma\rangle \supsetneq S_{n,p}$

car $\sigma(P_1) \not\subset P_1$ donc $\sigma \notin S_{n,p}$ et $\langle S_{n,p}, \sigma\rangle \subsetneq S_n$.

car $n \geq 3$ donc P_1 et P_2 contiennent au moins 2 éléments et $\langle S_{n,p}, \sigma\rangle$ ne ~~c~~ontient pas la transposition permutant un élément de P_1 avec un élément de P_2.

3) Dans cette question, si E est un ensemble $S(E)$ désigne l'ensemble des permutations des éléments de E.

Cas $k = 1$. $Q_1 = \{1, \dots, n-1\}$ $Q_2 = \{n\}$. Soit H un sous-groupe de S_n tel que $S_{n,Q} \subsetneq H$. Il existe dans H un élément σ tel que $\sigma(n) \neq n$ (sinon $\forall \sigma \in H$ $\sigma(Q_i) \subset Q_i$ et $H \subset S_{n,Q}$)

Soit i dans Q_1. Soit σ_1 un élément de $S(Q_1)$ tel que $\sigma_1(i) = \sigma^{-1}(n)$. On étend sa définition à Ω_n en posant $\sigma_1(n) = n$. On a $\sigma_1 \in H$ (car $H \supset S_{n,Q}$).

Soit σ_2 un élément de Q_1 tel que $\sigma_2(\sigma(n)) = i$ et $\sigma_2(\sigma(\sigma_1(j))) = j$ pour $j \neq i$, étendu à Ω_n par $\sigma_2(n) = n$. On a $\sigma_2 \in H$.

Finalement : $(i, n) = \sigma_2 \circ \sigma \circ \sigma \in H$. Comme H contient toutes les permutations σ telles que $\sigma(Q_1) \subset Q_1$ il contient donc toute les transpositions (i, j) $1 \leq i < j \leq n-1$.

H contient toutes les transpositions. Donc $H = S_n$.

cas général. On part d'un élément σ tel que $\sigma(Q_2) \not\subset Q_2$.
Une chirurgie similaire à celle du cas $k=1$ permet d'exhiber un élément σ' de H de la forme

$$\sigma' = (i_1, j_1) \qquad (i_\ell, j_\ell) \qquad \text{avec } \ell \leq k$$

où les i_s sont distincts et dans Q_1 et les j_s distincts et dans Q_2.

Puisque $\ell \leq k < n-k$ il existe un i dans Q_1 distinct de tous les i_s (et aussi des j_s, qui sont dans Q_2)

Soit $\tau = (i_1, i) \in S(Q_1) \subset H$ (En identifiant un élément de $S(Q_1)$ avec son prolongement qui laisse fixe chaque élément de Q_2).

Alors $\sigma'^{-1} \tau \sigma' \in H$.

Or $\sigma'^{-1} \tau \sigma' = (i, j_1)$.

On a donc dans H une transposition d'un élément de Q_1 avec un élément de Q_2. On termine comme dans le cas $k=1$.