Equations différentielles : le théorème de Cauchy linéaire

Exercice 1:

▷ Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Toutes les normes sont équivalentes sur E, on en choisit une, notée $\| \; \|$. Soit a une application continue de $\mathbb{R}$ vers $L(E)$. Soit b une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers E et x_0 un élément de E.

▷ On se propose de démontrer que le problème de Cauchy

P_1
$$\begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

1) Si u est dans $L(E)$ on pose

$$|||u||| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

Montrer que $|||u|||$ est bien définie et que $u \mapsto |||u|||$ est une norme sur $L(E)$.

2) Montrer que pour tout x de E et tout u de $L(E)$:

$$\|u(x)\| \leq |||u||| \, \|x\|.$$

3) Montrer que $t \mapsto |||a(t)|||$ est continue.

4) Expliquer pourquoi si x est continue sur $\mathbb{R}$ l'application $t \mapsto a(t)(x(t))$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

5) En déduire que si x est solution du problème P_1 alors x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6) Montrer que la résolution du problème est équivalente à la recherche d'une fonction continue x telle que

P_2
$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\, du + \int_0^t a(u)(x(u))\, du.$$

▷ Soient x_1 et x_2 deux solutions de P_2, notons $z = x_1 - x_2$. Soit $[-A, A]$ un segment contenu dans $\mathbb{R}$.

7) Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout t de $[-A, A]$

$$\|z(t)\| \leq M \left| \int_0^t \|z(u)\|\, du \right|.$$

8) Soit $K = \sup_{u \in [-A,A]} \|z(u)\|$. Montrer par récurrence que pour tout n et tout t de $[-A, A]$ on a

$$\|z(t)\| \leq K \frac{(M|t|)^n}{n!}.$$

9) En déduire $z = 0$ puis $x_1 = x_2$. Comment interpréter ce résultat pour le problème qui nous préoccupe ?

▷ On va maintenant construire une suite de fonctions (x_n) continues sur $\mathbb{R}$ en partant de la fonction constante x_0, par récurrence, en posant

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\, du + \int_0^t a(u)(x_n(u))\, du.$$

10) Montrer que cette suite est bien définie.

11) Soit $A > 0$ montrer qu'il existe des constantes K et M telles que pour tout t de $[_A, A]$ et tout entier n

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq K \frac{(M|t|)^n}{n!}.$$

Indication : Reprendre la méthode des questions précédentes.

12) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} x_{n+1} - x_n$ converge normalement sur tout segment, puis que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers une fonction notée x.

13) Montrer que x est solution du problème P_2.

14) Conclure.