Equations différentielles : le théorème de Cauchy linéaire.

1) + E est de dimension finie, donc l'application linéaire u est continue. $\| \|$ est 1-lipschitzienne donc continue. Par composition $x \mapsto \|u(x)\|$ est continue

$\overline{B(0,1)} = \{x, \|x\| \leq 1\}$ est fermée et bornée. E est de dimension finie donc $\overline{B(0,1)}$ est un compact non vide

Par conséquent $x \mapsto \|u(x)\|$ est bornée sur $\overline{B(0,1)}$ et $|||u||| = \sup_{x, \|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ est bien défini.

+ On a $|||u||| \geq 0$ pour tout u de $\mathcal{L}(E)$.

. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ $|||\lambda u||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda u(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|u(x)\|$

$|||\lambda u||| = |\lambda| \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u(x)\| = |\lambda| \, |||u|||$

- $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $\forall x \in E$ $\|(u+v)(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$.

$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $\forall x \in E$ $\|x\| \leq 1$ $\|(u+v)(x)\| \leq |||u||| + |||v|||$

En passant à la borne supérieure $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$

. Finalement si $|||u||| = 0$ alors $\forall x \in E$ $\|x\| \leq 1$ $u(x) = 0$

Or $\forall y \in E$ $\exists x$ $\|x\| = 1$ $y = \|y\| x$.

$\forall y \in E$ $u(y) = \|y\| u(x) = 0$.

$|||u||| = 0 \Rightarrow u = 0$.

Il résulte des propriétés précédentes que $|||\cdot|||$ est une norme.

2) $\forall x \in E$ $\exists y \in E$ $x = \|x\| y$ et $\|y\| = 1$ donc

$|||u(x)||| = \|x\| \, \|u(y)\| \leq \|x\| \, |||u|||$.

3) a est continue et $|||\cdot|||$ est continue car 1-lipschitzienne donc $t \mapsto |||a(t)|||$ est continue.

4) $\mathcal{L}(E) \times E \to E$, $(u, x) \mapsto u(x)$ est bilinéaire donc continue car $\mathcal{L}(E)$ et E sont de dimension finie. $t \mapsto (a(t), x(t))$ est continue car a et x le sont.

Donc, par composition $t \mapsto a(t)(x(t))$ est continue

5) Si x est solution de P_1 alors $\forall t \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ donc, d'après la question précédente et puisque b aussi est continue, x' est continue et x est de classe $\mathcal{C}^1$

6) (Première question à bien argumenter.)

Si x est solution de P_1 alors x est de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) - x(0) = \int_0^t x'(u)\,du$ c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\,du + \int_0^t a(u)(x(u))\,du.$$

Réciproquement : si x est continue et vérifie.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\,du + \int_0^t a(u)(x(u))\,du.$$

Alors d'après le raisonnement de la question 5) $u \mapsto a(u)(x(u))$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que b, donc x est de classe $\mathcal{C}^1$

et $\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) = b(t) + a(t)(x(t))$,

et on a clairement $x(0) = x_0$ donc x est solution de P_1

7) (Cette question, ainsi que les question 8 et 11, ont donné lieu à beaucoup de fautes de majoration (majoration à l'intérieur des valeurs absolues). Il fallait impérativement se débarasser des valeurs absolues en étudiant séparément les cas $t \leq 0$ et $t \geqslant 0$. On pouvait certes gagner en concision en utilisant

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \|f(t)\|\,dt$$ ainsi que

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\,dt \right| = \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \varphi(t)\,dt$$ si φ est positive.)

Soit donc x_1 et x_2 deux solutions de P_2 et $z = x_1 - x_2$

Par linéarité de l'intégrale on obtient

$$\forall t \in [-A, A] \quad z(t) = \int_0^t a(u)(z(u))\,du.$$

On discute selon que $t \leq 0$ ou $t \geqslant 0$

Si $t \in [0, A]$

$$\|z(t)\| \leq \int_0^t \|a(u)(z(u))\| du \leq \int_0^t |||a(u)||| \, \|z(u)\| \, du$$

Or $u \mapsto |||a(u)|||$ est continue sur le compact $[-A, A]$, elle est donc majorée. Il existe M tel que $\forall u \in [-A, A]$ $|||a(u)||| \leq M$

$$\|z(t)\| \leq M \int_0^t \|z(u)\| du = M \left| \int_0^t \|z(u)\| du \right|$$

De même si $t \in [-A, 0]$

$$\|z(t)\| \leq \int_t^0 \|a(u)(z(u))\| du \leq M \int_t^0 \|z(u)\| du = M \left| \int_0^t \|z(u)\| du \right|$$

Dans les deux cas

$$\forall t \in [-A, A] \quad \|z(t)\| \leq \left| \int_0^t \|z(u)\| du \right|$$

8) On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 0$ $\quad \forall t \in [-A, A]$ $\|z(t)\| \leq \sup_{u \in [-A, A]} \|z(u)\| = K \leq K \dfrac{(M|t|)^0}{0!}$

On suppose le résultat vrai à l'ordre n.

Supposons $t \in [-A, A]$, alors :

Si $t \geq 0$ $\quad z(t) = \int_0^t a(u)(z(u)) du$ donc $\|z(t)\| \leq \int_0^t M \|z(u)\| du$

$$\|z(t)\| \leq K \int_0^t \frac{M^{n+1}}{n!} u^n du = \frac{K (Mt)^{n+1}}{(n+1)!} = K \frac{(M|t|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $t \leq 0$

$$\|z(t)\| \leq \int_t^0 M \|z(u)\| du \leq K \int_t^0 \frac{M^{n+1}}{n!} |u|^n du = K \frac{M^{n+1}}{n!} \int_t^0 (-u)^n du$$

$$\|z(t)\| \leq K \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n \left[u^{n+1} \right]_t^0 = K \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^{n+1} t^{n+1}$$

$$\|z(t)\| \leq \frac{K (M|t|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

9) Choisissons, si t est dans $\mathbb{R}$, $A = |t|$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \|z(t)\| \leq \frac{K (M|t|)^n}{n!}$$

Par croissance comparée $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{K (M|t|)^n}{n!} = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\|z(t)\| = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ et $x_1 = x_2$.

10) l'argument de la question 5) montre que si x_n est continue alors x_{n+1} est définie et de classe $\mathcal{C}^1$, et en particulier continue. Il en résulte que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues est bien définie. (4)

11) Comme à la question 7) on obtient par soustraction, pour tout entier $n\geq 1$ et tout t de $[-A,A]$:

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_0^t a(u)\left(x_n(u) - x_{n-1}(u)\right) du.$$

En suite, en distinguant les cas $t\geq 0$ et $t\leq 0$, on obtient :

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq M\left|\int_0^t \|x_n(u) - x_{n-1}(u)\| du\right|.$$

En choisissant $K = \sup_{t\in[-A,A]} \|x_1(t) - x_0(t)\|$ et en calquant la démonstration de la question 8) on obtient

$$\forall t\in[-A,A] \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq K\frac{(M|t|)^n}{n!}$$

12). On a donc $\forall t\in[-A,A]\ \forall n\in\mathbb{N}\ \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq K\frac{(MA)^n}{n!}$ (ne pas oublier que M dépend de A).

Or $\sum_{n\geq 0} K\frac{(MA)^n}{n!}$ converge (vers $K\exp(MA)$), donc

$\sum_{n\geq 0}(x_{n+1} - x_n)$ converge normalement sur le segment $[-A,A]$ elle converge donc uniformément sur ce segment. Par conséquent la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[-A,A]$ (et cela pour tout A de $\mathbb{R}^+$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$).

On note x la limite (simple) de $(x_n)_{n\geq 0}$. (Elle est définie car la convergence uniforme sur tout segment implique la convergence simple sur tout segment, donc la convergence simple sur $\mathbb{R}$).

13) Chaque x_n est continue et $(x_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers x sur $[-A,A]$. ($A \in \mathbb{R}^+$). Donc la restriction de x à $[-A,A]$ est continue, pour tout A de $\mathbb{R}^+$. Donc x est continue sur $\mathbb{R}$.

. Soit t dans $\mathbb{R}$, soit $M_t = \sup_{u \in [\min(0,t),\max(0,t)]} |||a(u)|||$. Alors

$\forall u \in [\min(0,t),\max(0,t)] = I_t$ $\|a(u)(x_n(u)) - a(u)(x(u))\| = \|a(u)(x_n(u) - x(u))\|$

$\forall u \in I_t$ $\|a(u)(x_n(u)) - a(u)(x(u))\| \leq M_t \|x_n(u) - x(u)\|$.

donc $\underline{\sup_{u \in I_t} \|a(u)(x_n(u)) - a(u)(x(u))\|} \leq M_t \underline{\sup_{u \in I_t} \|x_n(u) - x(u)\|}$

Puisque (x_n) converge uniformément vers x sur I_t, on en déduit que <u>$(a(x_n))$ converge uniformément vers $a(x)$ sur le segment I_t.</u>

On peut donc permuter limite et intégration dans

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\,du + \int_0^t a(u)(x_n(u))\,du$$

et

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(u)\,du + \int_0^t a(u)(x(u))\,du.$$

donc x est solution de P_2.

14) On vient de montrer qu'il existe une solution de P_2. et donc de P_1. On avait prouvé l'unicité d'une telle solution. On en déduit que le problème P_1 possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$