Devoir adapté du sujet Mines-Ponts MP 2005 - I

Partie préliminaire (ajoutée)

1) Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, $\Phi_A : X \mapsto AX$ et $\Phi_B : X \to BX$ commutent et sont diagonalisables

On peut écrire $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_A(\lambda)$.

Puisque Φ_A et Φ_B commutent chaque $E_A(\lambda)$ est stable par Φ_B. Soit $\tilde{\Phi}_{B,\lambda}$ l'endomorphisme induit par Φ_B sur $E_\lambda(A)$.

$\tilde{\Phi}_{B,\lambda}$ est diagonalisable (résultat du cours). Il existe donc une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_A(\lambda)$ formée de vecteurs propres de Φ_B.

La concaténation des $\mathcal{B}_\lambda$ donne une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres communs à Φ_A et à Φ_B donc A et B sont simultanément diagonalisables.

2) $X \to MX$ est linéaire donc continue car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Il existe donc une constante c telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \|MX\| \leq c\|X\|$. (Rq : on pourrait en déterminer une explicitement $\left(\sum m_{i,j} x_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)$ (Cauchy-Schwarz-Bunyakovskiĭ) donc $\|MX\|^2 \leq \left(\sum_{(i,j)} m_{i,j}^2\right)\|X\|^2$, et on peut choisir $c = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2}$)

En particulier $\|X\| \leq 1 \Rightarrow \|MX\| \leq c$, et puisque $n \geq 1$ il existe au moins un X tel que $\|X\| = 1$. donc $\{\|MX\|, \|X\| = 1\}$ est non vide majoré, donc N est bien définie.

- $N(M) \geq 0$, $N(\lambda M) = |\lambda| N(M)$ et $N(M_1 + M_2) \leq N(M_1) + N(M_2)$ d'après les propriétés de la borne supérieure.
- Si $N(M) = 0$ alors $\forall X, \|X\| = 1 \quad MX = 0$, or $\forall Y \neq 0$ $\left\|\frac{1}{\|Y\|} Y\right\| = 1$ et par conséquent $MY = \|Y\| M\left(\frac{1}{\|Y\|} Y\right) = 0$. Vrai aussi pour $Y = 0$. $\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad MY = 0$ donc $M = 0$.

3) $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad X \neq 0 \qquad \| M (\frac{1}{\|X\|} X) \| \leq \| M \|$

$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad X \neq 0 \qquad \| M X \| \leq \| M \| \, \| X \|$, vrai aussi pour $X = 0$.

Donc $\forall X \in \mathbb{R}^n \; \|X\| = 1 \qquad \| A B X \| \leq \| A \| (\| B X \|) \leq \| A \| \, \| B \| \, \| X \| = \| A \| \, \| B \|$

en passant à la borne supérieure on en déduit $\| A B \| \leq \| A \| \, \| B \|$

On en déduit par récurrence, puisque $\| I_n \| = 1$ que

$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \| A^p \| \leq \| A \|^p$

4) $\forall p \in \mathbb{N} \; 0 \leq \| \frac{1}{p!} A^p \| \leq \frac{1}{p!} \| A \|^p$ et $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \| A \|^p$ converge vers $e^{\|A\|}$.

Donc $\sum_{p \geq 0} \| \frac{1}{p!} A^p \|$ converge, donc $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} A^p$ converge absolument

Or $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} A^p$ converge.

5) $A B = B A$, par récurrence $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p B = B A^p$.

Par linéarité $\forall N \quad \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^p \right) B = B \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^p \right)$

Les applications $M \mapsto M B$ et $M \mapsto B M$ sont des endomorphismes de $(M_n(\mathbb{R}))$ qui est de dimension finie, elle sont donc continues et par passage à la limite.

$$(\exp A) \, B = B (\exp A)$$

6) Ecrivons $A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ Alors

$\exp(tA) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} (a_{i,j}^{(p)}) t^p \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Donc chaque coefficients de $\exp(tA)$ est la somme d'une série entière qui converge pour tout t réel et est donc de rayon de convergence égal à $+\infty$. Chaque coefficient de $\exp(tA)$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de $\Phi_n : t \mapsto \exp(tA)$

De plus. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Phi_A'(t) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+1)\, a_{ij}^{(p+1)}}{(p+1)!} t^p \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\Phi_A'(t) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{ij}^{(p+1)}}{p!} t^p \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\Phi_A'(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p A^{p+1}$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{p!} t^p A^{p+1} \right) = \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} t^p A^p \right) A$.

le même argument de continuité que dans la question 5) permet d'affirmé $\underline{\forall t \in \mathbb{R}\ \Phi_A'(t) = \Phi_A(t) A = A \Phi_A(t)}$

(la deuxième égalité se justifiant comme la première)

7) Soit $\psi : t \mapsto \exp(t(A+B))$ et

$\theta : t \mapsto \exp(tA) \exp(tB)$.

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ψ d'après ce qui précède et θ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$ $\underline{\psi'(t) = (A+B)\, \Phi_{A+B}(t) = (A+B)\, \psi(t)}$

$\underline{\theta'(t) = A\, \Phi_A(t)\, \Phi_B(t) + \Phi_A(t)\, B\, \Phi_B(t)}$

Or tA et B commutent, donc, d'après la question 5

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\theta'(t) = (A+B)\, \Phi_A(t) \Phi_B(t) = (A+B)\, \theta(t)$.

ψ et θ sont donc solution du problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} X' = (A+B) X \\ X(0) = I_n \end{cases}$$

Il possède une unique solution. Donc $\psi = \theta$ et en particulier

$\psi(1) = \underline{\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)} = \theta(1)$

I) Préliminaires

8) Si $M = A + B$ avec $A \in S_r(\mathbb{R})$ et $B \in A_r(\mathbb{R})$ alors $^tM = {}^tA + {}^tB = A - B$ donc $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Donc la décomposition est unique et la somme est directe. Il est facile de vérifier que si A et B sont définies comme ci-dessus A est dans $S_r(\mathbb{R})$, B dans $A_r(\mathbb{R})$ et $M = A + B$, donc $M_r(\mathbb{R}) = S_r(\mathbb{R}) \oplus A_r(\mathbb{R})$

9) $M = \sum_{k,l} m_{k,l} E_{k,l}$ $\quad ME_{i,j} = \sum_{k,l} m_{k,l} E_{k,l} E_{i,j}$

$$ME_{i,j} = \sum_{k,l} m_{k,l}\, \delta_{i,l}\, E_{k,j} = \sum_k m_{k,i}\, E_{k,j}$$

Donc $tr(ME_{i,j}) = m_{j,i}$

10) Soit M dans $M_r(\mathbb{R})$ telle que $tr(MT) = 0$ pour tout T de A_r. Alors pour tout couple (i,j) avec $i < j$.

$tr(M(E_{i,j} - E_{j,i})) = 0 = m_{j,i} - m_{i,j}$. Donc M est symétrique.

(Remarque : la réciproque est vraie. Si $M \in S_r(\mathbb{R})$ et $T \in A_r(\mathbb{R})$ $tr(MT) = tr({}^t(MT)) = tr({}^tT\,{}^tM) = -tr(TM) = -tr(MT)$, donc $tr(MT) = 0$. $S_r(\mathbb{R})$ et $A_r(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire usuel sur $M_r(\mathbb{R})$: $(A,B) \to tr({}^tAB)$).

11) $\forall N \in \mathbb{N}$ $\forall M \in M_r(\mathbb{R})$ $\quad {}^t\left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} M^p\right) = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} ({}^tM)^p$. L'application $M \mapsto {}^tM$ est $\mathbb{R}$ linéaire donc continue. On peut passer à la limite. On en déduit : $\forall M \in M_r(\mathbb{R})$ ${}^t(e^M) = e^{{}^tM}$.

Si T est dans $A_r(\mathbb{R})$ $\quad {}^t(e^T)e^T = e^{{}^tT}e^T = \underbrace{e^{-T}e^T}_{} = e^0 = I_r$.

Donc e^T est orthogonale. $\qquad$ car T et $-T$ commutent

12) $e^{sM} = I + sM + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!} s^p M^p$.

Or la série $\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p!} s^p M^p$ converge absolument, donc

$\forall s \in \mathbb{R} \quad \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!} s^p M^p \right\| \leq \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{|s|^p}{p!} \|M\|^p$

$\forall s \in \mathbb{R} \quad |s| \leq 1 \quad \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!} s^p M^p \right\| \leq s^2 \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!} \|M\|^p \leq s^2 e^{\|M\|}$

On a donc bien $e^{sM} = I + sM + O(s^2)$

PS : On pouvait aussi utiliser la formule de Taylor Young

13) Chaque α_j est une fonction polynomiale des coefficients de M, elle est donc continue.

14) Pour $s \neq 0 \quad \det(I + sM) = s^n \det\left(M - \left(-\frac{1}{s}\right) I\right)$

$$\det(I + sM) = s^n \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(M) \left(-\frac{1}{s}\right)^j \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(M) (-1)^j s^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}(M) (-1)^{n-k} s^k$$

$$= \alpha_n(M) \mp s\, \alpha_{n-1}(M) + O(s^2)$$

$$\det(I + sM) = 1 + s\, \mathrm{tr}(M) + O(s^2)$$

Remarque : par habitude j'ai rédigé la correction avec l'ancienne convention pour le polynôme caractéristique. J'aurais dû écrire $\det(I+sM) = (-s)^n \det\left(\left(-\frac{1}{s}\right)I - M\right)$ et continuer avec $(-s)$ au lieu de s. On obtient le même résultat.

$O(s^2)$ peut s'écrire $s^2 M_1(s)$ où la fonction M_1 est bornée au voisinage de 0. La fonction $M + sM_1$ est bornée au voisinage de 0, donc les $\alpha_{n-k}(M + sM_1)$ aussi, car les α_{n-k} sont continues ($M + sM_1$ est à valeurs dans une boule fermée donc compacte). On a donc toujours $\sum_{k=2}^{n} \alpha_{n-k}(M + sM_1) s^k = O(s^2)$

et $\mathrm{tr}(M + sM_1(s)) = \mathrm{tr}(M) + s\, \mathrm{tr}(M_1(s)) = \mathrm{tr}(M) + O(s)$,

et finalement

$\det(I + sM + O(s^2)) = 1 + s\, \mathrm{tr}(M + sM_1) + O(s^2) = 1 + s\, \mathrm{tr}(M) + O(s^2)$

15) On peut écrire $M = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $r < n$. Choisissons $N_0 = P\begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & t \end{smallmatrix} \end{pmatrix} Q^{-1}$

$M + N_0 = P\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} Q^{-1}$ $\det(M+N_0) = \det P (\det Q)^{-1} t$.

Il suffit de choisir t de tel sorte que $\det P(\det Q)^{-1} t > 0$ par exemple $\det Q\,(\det P)^{-1}$, alors $\det(M + sN_0) > 0$ si $s > 0$

16) le principe est le même : ~~si~~

- Si M est diagonalisable $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

où les λ_i sont non nuls.

On choisit N_0 de la même forme avec ~~det~~

$t = \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{-1}$

$\left(N_0 = P\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & t \end{pmatrix} P^{-1} \right.$ est bien diagonalisable !

- Si M est symétrique (puisqu'elle est réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale). $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tP$

avec ${}^tP = P^{-1}$

$N_0 = P\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & t \end{pmatrix} {}^tP \in S_n(\mathbb{R})$

avec $t = \left(\prod \lambda_i\right)^{-1}$, répond à la question.

Remarque. Dans les trois cas on a ~~trouvé~~ obtenu ~~de~~

$\det(M + sN_0) = s^{n-r} > 0$ si $s > 0$.

II) Démonstration de l'inégalité (1)

17) Si A et B sont symétriques, elles sont diagonalisables.
Si de plus elle commutent elles sont simultanément diagonalisables.
Il existe P tel que $A = PDP^{-1}$ $B = PD'P^{-1}$. Quitte à réordonner les vecteurs de la base diagonalisante on peut supposer $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ on aura alors $D' = \mathrm{diag}(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$ où σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ et finalement $\underline{\det(A+B) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})}$ car
$A + B = P(D+D')P^{-1}$ et $D+D'$ est diagonale.

18) $\underline{O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\} = \Phi^{-1}(\{1\})}$ où
$\Phi(M) = {}^tMM$. Φ est continue (continuité de la transposée et du produit. On peut aussi dire que chaque coefficient de ${}^tMM$ est polynomial en les coefficients de M), $\{1\}$ est fermé donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.

$\underline{\forall X \ \|X\| = 1 \quad \forall M \in O_n(\mathbb{R}) \ \|MX\| = \|X\| = 1, \text{ donc } \|M\| = 1.}$

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

$O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans un espace de dimension finie, donc $\underline{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$.

19) L'application $\underline{\begin{array}{rcl} O_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ U & \mapsto & UMU^{-1} = UM{}^tU \end{array}}$ est continue (même argument que dans la question précédente) donc $O_n(M)$ est compact, pour toute matrice M et en particulier B.
$\det$ est continue (car polynomiale) donc $\det$ est bornée sur $O_n(B)$ et atteint ses bornes, d'où l'existence de C.

II. 1. $A+B_0$ inversible

20) De l'inégalité $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$ il découle qu'on peut manipuler ~~les~~ relation $\mathcal{O}$ sur les matrices comme sur les fonctions à valeurs complexe, en particulier vis-à-vis de la multiplication.

$$e^{sT} B_0 e^{-sT} = (I + sT + \mathcal{O}(s^2)) B_0 (I - sT + \mathcal{O}(s^2))$$
$$= (I + sT + \mathcal{O}(s^2))(B_0 - s B_0 T + \mathcal{O}(s^2))$$
$$e^{sT} B_0 e^{-sT} = B_0 + s(T B_0 - B_0 T) + \mathcal{O}(s^2)$$

$$A + e^{sT} B_0 e^{-sT} = A + B_0 + s(T B_0 - B_0 T) + \mathcal{O}(s^2)$$
$$= (I + s(TB_0 - B_0 T)(A+B_0)^{-1} + \mathcal{O}(s^2))(A+B_0)$$

$$\det(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}) = \det(I + s(TB_0 - B_0 T)(A+B_0)^{-1} + \mathcal{O}(s^2)) \det(A+B_0)$$

En utilisant le résultat de la question 14)

$$\underline{\det(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}) = \det(A+B_0)\left(1 + s\,\mathrm{tr}\left((TB_0 - B_0 T)(A+B_0)^{-1}\right)\right) + \mathcal{O}(s^2)}$$

21) $\Psi_T(0) = \det(A+B_0)$ et d'après 11) e^{sT} est orthogonale et d'après la 7) $e^{-sT} = (e^{sT})^{-1}$. Donc $e^{sT} B_0 e^{-sT} \in \mathcal{O}_n(B_0)$

et $\mathcal{O}_n(B_0) = \mathcal{O}_n(B)$ car $B_0 = U B U^{-1}$ avec U dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication.

En conclusion $\forall s \quad e^{sT} B_0 e^{-sT} \in \mathcal{O}_n(B)$.

La définition de B_0 implique $\underline{\forall s \quad \Psi_T(s) \leq \Psi_T(0)}$.

22) Or le développement limité obtenu à la question précédente montre que Ψ_T est dérivable en 0, et puisque 0 est intérieur à $\mathbb{R}$, $\underline{\Psi_T'(0) = 0}$ soit $\det(A+B_0)\,\mathrm{tr}((TB_0 - B_0 T)(A+B_0)^{-1}) = 0$

et finalement $\mathrm{tr}((TB_0 - B_0 T)(A+B_0)^{-1}) = 0$

$$\underline{\mathrm{tr}(T B_0 (A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(B_0 T (A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(T (A+B_0)^{-1} B_0)}$$

(car $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$)

23) On obtient donc pour toute matrice antisymétrique

$$tr\left(T\left(B_0(A+B_0)^{-1}-(A+B_0)^{-1}B_0\right)\right)=0$$

$$\parallel$$

$$tr\left(\left(B_0(A+B_0)^{-1}-(A+B_0)^{-1}B_0\right)T\right)=0$$

Il en résulte (question 10) que $\underline{B_0(A+B_0)^{-1}-(A+B_0)^{-1}B_0=K}$ est symétrique. Or puisque B_0 et A sont symétriques et ${}^t(MN)={}^tN\,{}^tM$ et ${}^t(N^{-1})=({}^tN)^{-1}$, on peut affirmer aussi que K est antisymétrique. Par conséquent $\underline{K=0}$ et

$$B_0(A+B_0)^{-1}=(A+B_0)^{-1}B_0$$

$$(A+B_0)\,B_0\,I=I\,B_0(A+B_0)$$

$$AB_0+B_0^2=B_0A+B_0^2$$

$$\underline{AB_0=B_0A}$$

24) D'après la question 17 $\det(A+B_0)=\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_{\sigma(k)})$ (pour un σ) car B_0 est semblable à B. Or $B\in\mathcal{O}_n(B_0)$ donc

$$\det(A+B)\leq\det(A+B_0)\leq\max_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_{\sigma(k)})\right)$$

II.2 $A+B_0$ singulière.

25) On applique le résultat de la question 16 dans le cas symétrique à $A+B_0$. Il existe N_0 symétrique telle que $\forall s>0$ $\det(A+B_0+sN_0)>0$.

Posons $\underline{N_k=B_0+\frac{1}{2^k}N_0}$

(i) On a bien $\lim_{k\to+\infty}N_k=B_0$

(ii) Il existe B_k dans $\mathcal{O}_n(N_k)$ tel que

$$\det(A+B_k)=\sup_{C\in\mathcal{O}_n(B_k)}\det(A+C)\text{, en particulier !}$$

(iii) $\det(A+N_k)\leq\det(A+B_k)$ pour $k>0$

(iv) B_k commute avec A (question 23) appliquée à $A+N_k$ qui est inversible)

26) La suite N_k est convergente, pour tout k il existe U_k dans $O_n(\mathbb{R})$ tel que $B_k = U_k N_k U_k^{-1} = U_k N_k {}^tU_k$.

$O_n(\mathbb{R})$ est compact. On peut donc extraire de la suite $(U_k)_{k\geq 0}$ une suite convergente $(U_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ avec $\lim\limits_{k\to+\infty} U_{\varphi(k)} = U \in O_n(\mathbb{R})$

On en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} B_{\varphi(k)} = B' = U B_0 {}^tU = U B_0 U^{-1}$.

En particulier $Sp(B') = Sp(B_0)$ (en tenant compte des multiplicités.

~~Le~~ B' est symétrique et puisque $\forall k$ $A B_{\varphi(k)} = B_{\varphi(k)} A$ on a $B'A = AB'$.

Par continuité du déterminant, de $\det(A+N_{\varphi(k)}) \leq \det(A+B_{\varphi(k)})$ on tire $\det(A+B_0) \leq \det(A+B')$, soit

$$\det(A+B) \leq \det(A+B') \leq \max_{\sigma\in S_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b'_{\sigma(k)})$$

Or il existe une permutation σ' de S_n tel que $b'_i = b_{\sigma'(i)}$

donc
$$\det(A+B) \leq \max_{\sigma\in S_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma'\sigma(k)}) = \max_{\sigma\in S_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$$

car $\sigma \to \sigma'\sigma$ est une bijection de S_n sur lui-même

(c'est la question la plus difficile du problème)

III) Une permutation qui réalise le maximum.

On suppose $a_1 \leq a_2 \quad \leq a_n$.
$b_1 \leq b_2 \quad \leq b_n$.

$\forall i,j$: $a_i + b_j > 0$

Soit σ une permutation réalisant le maximum de P une telle permutation existe car $\{P(\sigma), \sigma \in S_n\}$ est fini.

Supposons qu'il existe un (i,j) tel $\sigma(i) < \sigma(j)$ et $i < j$

Alors $(a_i + b_{\sigma(i)})(a_j + b_{\sigma(j)}) - (a_i + b_{\sigma(j)})(a_j + b_{\sigma(i)})$

vaut $(a_i - a_j)(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) \geq 0$ (*)

Donc en composant σ à gauche par $\tau = (\sigma(i), \sigma(j))$ on obtient une permutation σ' avec $P(\sigma') \geq P(\sigma)$ et pour tous les autres couples k, l tels que $k < l$ et $\sigma(k) > \sigma(l)$ on ait $\sigma'(k) > \sigma'(l)$.

On peut donc par itération obtenir une permutation σ réalisant le maximum et telle que $i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$

Cette permutation est unique c'est la permutation $i \mapsto n+1-i$.

le résultat est donc prouvé.

P.S (*) implique $P(\sigma') \geq P(\sigma)$ car les autres termes du produit sont positifs. (on remarquera que l'hypothèse $a_i + b_j \geq 0$ pour tout (i,j) est donc suffisante)