**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **FILIÈRE MP**

**CONCOURS D'ADMISSION 2008**

# PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

## Équations différentielles de Sturm-Liouville

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $C^\infty([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe $C^\infty$ sur $[0,1]$.

### Première partie

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions $p$ et $q$ de $C^\infty([0,1])$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$ : $A_{p,q}(y) = 0$.

**1.** Soit $y$ une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.

**1.a)** Montrer que les fonctions $y$ et $y'$ ne s'annulent pas simultanément.

**1.b)** Montrer que les zéros de $y$ sont en nombre fini.

**2.** Soit $y_1$ et $y_2$ deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ ; on suppose que $y_1$ admet au moins deux zéros et on note $a$ et $b$ deux zéros consécutifs.

**2.a)** Montrer que $y_2$ admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. [On pourra procéder par l'absurde et considérer le wronskien $W$ de $y_1$ et $y_2$.]

**2.b)** La fonction $y_2$ peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$ ?

Étant donné deux fonctions $u$ et $v$ de $C^\infty([0,1])$, $u$ ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0,1])$ défini par

$$B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$ : $B_{u,v}(y) = 0$.

**3.a)** Soit $y_1$ et $y_2$ deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ et soit $W$ leur wronskien. Vérifier la relation

$$y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W \ .$$

**3.b)** Montrer que, pour tout couple $(p, q)$, il existe des couples $(u, v)$ tels que $\text{Ker } A_{p,q} = \text{Ker } B_{u,v}$ et déterminer tous ces couples $(u, v)$.

**4.** On se donne trois fonctions $u, v_1, v_2$ de $C^\infty([0, 1])$ et on suppose

$$u(x) > 0 \quad , \quad v_2(x) < v_1(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1] \ .$$

Pour $i = 1, 2$, on note $y_i$ une solution non identiquement nulle de l'équation $(E_{u,v_i})$ ; on suppose que $y_2$ admet au moins deux zéros et on note $a$ et $b$ deux zéros consécutifs.

**4.a)** Vérifier la relation

$$[uy_1y_2']_a^b = \int_a^b \Big(v_1(x) - v_2(x)\Big) y_1(x)y_2(x)\, dx \ .$$

[On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b \Big(y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1)\Big) dx$.]

**4.b)** Montrer que $y_1$ admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a, b[$. [On pourra procéder par l'absurde.]

Dans toute la suite du problème on note $r$ une fonction de $C^\infty([0, 1])$ ; pour tout nombre réel $\lambda$ on considère l'équation différentielle sur $[0, 1]$ :

$$(D_\lambda) \qquad\qquad y'' + (\lambda - r)y = 0 \ .$$

On note $y_\lambda$ l'unique solution de $(D_\lambda)$ satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y_\lambda'(0) = 1$, et $E_\lambda$ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de $(D_\lambda)$ satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$ ; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que $\lambda$ est *valeur propre*.

## Deuxième partie

**5.a)** Quelles sont les valeurs possibles de $\dim E_\lambda$ ?

**5.b)** Démontrer l'équivalence des conditions $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

**6.** Démontrer les assertions suivantes :

**6.a)** Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x\in[0,1]} r(x)$.

**6.b)** Si $y_1 \in E_{\lambda_1}$, $y_2 \in E_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x)y_2(x)\, dx = 0$.