Concours commun Mines-Ponts 2000 Maths II

1.a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad u_n(x) \neq 0$

Soit $x \neq 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}|x| = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = 4|x|}$$

Donc si $|x| < \frac{1}{4}$ $\quad \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge absolument (règle de d'Alembert)

si $|x| > \frac{1}{4}$ $\quad \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ ne converge pas absolument.

Donc $\boxed{R = \frac{1}{4}}$

1.b) h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et de plus

$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\qquad h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\binom{2n+2}{n+1} x^n$

$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

$$(1-4x)h'(x) - 2h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\binom{2n+2}{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2\binom{2n}{n}x^n$$

$$= \binom{2}{1} - 2\binom{0}{0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{(n+1)\binom{2n+2}{n+1} - 4n\binom{2n}{n} - 2\binom{2n}{n}\right\}x^n$$

$$\boxed{(1-4x)h'(x) - 2h(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{(n+1)\binom{2n+2}{n+1} - 2(2n+1)\binom{2n}{n}\right\}x^n}$$

Or pour $n \geq 1$

$$(n+1)\binom{2n+2}{n+1} = (n+1)\frac{2n+2}{n+1}\binom{2n+1}{n} = 2(n+1)\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = 2(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

donc $\boxed{(n+1)\binom{2n+2}{n+1} - 2(2n+1)\binom{2n}{n} = 0}$

On a bien

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\qquad (1-4x)h'(x) = 2h(x)$$

1.c) On en déduit $h(x) = h(0)\exp\left(\int_0^x \frac{2\,dt}{1-4t}\right)$ pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

$$\boxed{\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}}$$

2) On utilise le résultat du cours : pour α dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière, de rayon de convergence égal à 1 (*). Plus précisément :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{avec}$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

[(*) Si α est entier le rayon de convergence est égal à $+\infty$]

Ici $\alpha = -p$. donc

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^p} = (1-x)^{-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p}{n} (-x)^n$$

Or $$\binom{-p}{n} = \frac{-p \times (-p-1) \times \cdots \times (-p-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}$$

$$\binom{-p}{n} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}.$$

Finalement

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{p-1} x^n.$$

Rq : On pouvait aussi obtenir ce résultat en dérivant p fois terme à terme la relation $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$.

3.a) La fonction f est définie sur $\{x \in \mathbb{R},\ 1-6x+x^2>0\}$

Or $x^2-6x+1 = (x-(3+2\sqrt{2}))(x-(3-2\sqrt{2}))$. Par conséquent

$$D_f =]-\infty, 3-2\sqrt{2}[\cup]3+2\sqrt{2}, +\infty[.$$

(On remarquera que $0 \in]-\infty, 3-2\sqrt{2}[$ car $9>8$.)

3B) Il faut déjà que l'on puisse parler de $h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$

Une condition nécessaire est donc :

$$x \neq 1 \text{ et } -\frac{1}{4} < \frac{x}{(1-x)^2} < \frac{1}{4}. \qquad \text{Or } x\neq 1 \Rightarrow (1-x)^2 > 0$$

ceci équivaut à

$$x \neq 1 \text{ et } -\frac{1}{4}(1-x)^2 < x < \frac{1}{4}(1-x)^2$$

puis à :

$$-(1-x)^2 < 4x < (1-x)^2$$

(car $x=1$ est incompatible avec ces inégalités)

$$-(1+x)^2 < 0 < 1-6x+x^2.$$

Soit finalement $x \neq -1$ et $1-6x+x^2 > 0$.

Si cette condition est vérifiée, on a a alors

$$h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1-x)^2}}} = \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-6x+x^2}} = \frac{|1-x|}{\sqrt{1-6x+x^2}}$$

On aura donc $f(x) = \frac{1}{1-x}\, h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$ ssi

$1-6x+x^2 > 0$ et $1-x > 0$ et $x\neq -1$ c'est-à-dire

ssi $\boxed{x \in \left]-\infty, 3-2\sqrt{2}\right[\text{ et } x \neq -1}$

On en déduit

$$\forall x \in \left]-1, 3-2\sqrt{2}\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-1, 3-2\sqrt{2}\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n M_{2n+1}(x)\, x^n}$$

avec $\boxed{\lambda_n = \binom{2n}{n}}$

3C) En utilisant le résultat de la question 2.

$\forall x \in \left]-1, 3-2\sqrt{2}\right[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\binom{2n+k}{k} x^{k+n}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \binom{2n}{n}\binom{n+p}{p-n} x^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p}\, x^p}$$

avec $\alpha_{n,p} = 0$ si $p < n$

$$\alpha_{n,p} = \binom{2n}{n}\binom{n+p}{p-n} \text{ si } p \geq n.$$

On voudrait permuter les signes de sommation. Il faut établir la sommabilité de $(\alpha_{n,p}\, x^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ si x est dans un voisinage de 0.

Supposons $|x| < 3 - 2\sqrt{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{p\geq 0} |\alpha_{n,p}\, x^p|$ converge vers $\lambda_n M_n(|x|)\,|x|^n$.

$\sum_{n\geq 0} \lambda_n M_n(|x|)\,|x|^n$ converge vers $f(|x|)$.

(Ces deux résultats découlant du calcul du début de la question, appliqué à $|x|$.)

La suite double considérée est donc bien sommable et on peut écrire $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \ |x| < 3-2\sqrt{2} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$

avec $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{n+k}{n-k}}$

f est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence au moins égal à $3-2\sqrt{2}$.

~~[illegible]~~ Le rayon de convergence de cette série entière est exactement $3-2\sqrt{2}$. En effet s'il était strictement supérieur à $3-2\sqrt{2}$, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serait continue sur un intervalle contenant $3-2\sqrt{2}$. Il serait donc possible de prolonger f par continuité en $3-2\sqrt{2}$. Or

$\lim_{x \to 3-2\sqrt{2}} f(x) = +\infty$. $\boxed{R = 3 - 2\sqrt{2}}$

Rq: Cette question contenait deux difficultés sérieuses : la sommabilité de la suite double et la minoration de R. Elle a dû départager les candidats

3d) $\forall x \in]-\infty, 3-2\sqrt{2}[\cup]3+2\sqrt{2}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(x-3)}{(1-6x+x^2)^{3/2}} = -\frac{x-3}{x^2-6x+1} f(x).$$

$$\forall x \in D_f \quad \underbrace{(1-6x+x^2)}_{a(x)} f'(x) + \underbrace{(x-3)}_{b(x)} f(x) = 0$$

3e) $\forall x \in]-(3-2\sqrt{2}), 3+2\sqrt{2}[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et

on peut dériver terme à terme
$\forall x \in]-(3-2\sqrt{2}), 3+2\sqrt{2}[\quad f'(x) = \sum_{n=0} (n+1) a_{n+1} x^n$

$\forall x \in]-(3-2\sqrt{2}), (3+2\sqrt{2})[$

$$(1-6x+x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + (x-3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$(a_1 - 3a_0) + (2a_2 - 9a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + n a_{n-1}\right) x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière.

$$\begin{cases} a_1 - 3a_0 = 0 \\ 2a_2 - 9a_1 + a_0 = 0 \\ (n+1) a_{n+1} - 3(2n+1) a_n + n (a_{n-1}) = 0 \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

La deuxième ligne est équivalente à la troisième pour $n=1$. On a donc bien.

$a_1 = 3a_0$ et $\forall n \geq 1 \quad (n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + n a_{n-1} = 0$

$a_0 = 1 = f(0)$ donc $a_1 = 3$ puis $a_2 = 13$ $a_3 = 63$

4a) Si g est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$, de rayon de convergence R_1 non nul, alors g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_1, R_1[$ et $b_0 = g(0)$ $b_1 = g'(0)$

Donc $b_0 = 0$ $b_1 = 1$. La relation (R) définit ensuite une unique ~~fon~~ suite $(b_n)_{n \geq 0}$ par.

$\forall n \geq 1$ $\quad b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(3(2n+1)b_n - n b_{n-1}\right)$.

On aura, après calcul

$b_0 = 0$ $\quad b_1 = 1.$ $\quad b_2 = \dfrac{9}{2}$ $\quad b_3 = \dfrac{131}{6}.$

Le calcul fait à la question Be) montre que sur $]-R_1, R_1[$ on a

$$(1-6x+x^2)g'(x) + (x-3)g(x) = b_1 - 3b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0.x^n = 1.$$

(puisque les (b_n) vérifient (R)).

g est donc solution du problème différentiel.

$$\mathcal{P}. \begin{cases} (1-6x+x^2)y'(x) + (x-3)y(x) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4b) On résout ce problème en utilisant la méthode de la variation de la constante puisque f est solution de l'équation homogène.

On cherche donc g sous la forme $g(x) = k(x).f(x)$.

$\mathcal{P}$ devient

$$\begin{cases} (1-6x+x^2)k'(x)f(x) = 1 \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}} = f(x) \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

donc $k(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t)\,dt$$

4.c) - On sait qu'on peut intégrer terme à terme la somme d'une série entière. La série entière obtenue a même rayon de convergence que la série entière initiale.

- On peut aussi effectuer le produit de Cauchy de deux séries entières. Le rayon de convergence de la série entière obtenu est au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.

Dans notre cas, en posant $R = 3-2\sqrt{2}$.

$$\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

$$\forall x \in]-R, R[\quad \int_0^x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

$$\forall x \in]-R, R[\quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{a_{p-1}}{p} a_{n-p}\right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_{p-1} a_{n-p}}{p} \qquad (b_0 = 0)}$$

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est au moins $3-2\sqrt{2}$.

4.d) $\forall n \geq 1 \quad d_n b_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{d_n}{p} a_{p-1} a_{n-p}$ or.

$\forall p \ (a_p, a_{n-p}) \in \mathbb{Z}^2$ et $\frac{d_n}{p} \in \mathbb{N}$ donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{d_n b_n \in \mathbb{Z}}$.

5a) $u_1 = b_1 a_0 - b_0 a_1 \quad = 1$

$u_2 = b_2 a_1 - b_1 a_2 \quad = \frac{9}{2} \times 3 - 1 \times 13 = \frac{1}{2}.$

$$u_{n+1} = b_{n+1} a_n - b_n a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(3(2n+1)b_n - n b_{n-1}\right)a_n - b_n a_{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(3(2n+1)b_n - n b_{n-1}\right) a_n \cancel{(3(2n+1)a_n - a_{n+1})} - \frac{1}{n+2} b_n \left(3(2n+1)a_n - n a_{n-1}\right)$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{n}{n+1} u_n} \quad \text{Donc} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \frac{1}{n} \geq 0 \quad C = 1}$$

5 b) L'expression des a_n obtenue en 3c) montre que les a_n sont des entiers strictement positifs.

On a $\dfrac{1}{n} = b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n$.

donc $0 < \dfrac{1}{a_n a_{n-1} n} = \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$

$\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\geq 0}$ est définie et strictement croissante.

De plus $0 < \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leq \dfrac{C}{a_n a_{n-1}}$

Or $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{n+k}{n-k} \geq \binom{2}{1}\binom{n+1}{n-1} = 2\binom{n+1}{2} = n(n+1)$ pour $n \geq 1$.

Donc $\dfrac{C}{a_n a_{n+1}} = O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$ est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)$ est donc convergente. et

par conséquent $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)_{n\geq 0} \text{ est convergente}}$

6 a) On a déjà remarqué $\boxed{\lim_{x\to(3-2\sqrt{2})^-} f(x) = +\infty}$

$\forall x \geq \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ $\quad g(x) \geq f(x) \int_0^{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} f(t)\,dt$. donc

on a aussi ~~$\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$~~ $\boxed{\lim_{x\to(3-2\sqrt{2})^-} g(x) = +\infty}$

6 b) On a $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad (\lambda - \varepsilon) \leq \dfrac{b_n}{a_n} \leq \lambda + \varepsilon$

Fixons un tel N. Puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$

$\forall n \geq N \qquad a_n(\lambda - \varepsilon) \leq b_n \leq (\lambda + \varepsilon) a_n$.

La multiplication par x^n (positif), la sommation et le passage à la limite dans $\sum_{n=N+1}^{m} b_n x^n$ donne.

$$(\lambda - \varepsilon)\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leq (\lambda+\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

$\forall x \in [0, 3-\sqrt{8}[$: $\quad \boxed{(\lambda - \varepsilon) \leq \dfrac{V_N(x)}{U_N(x)} \leq (\lambda + \varepsilon)}$

6.c) les fonctions f_N et g_N sont continues sur $[0, 3-\sqrt{8}]$ donc bornées.

Finalement

$\forall x \in [0, 3-\sqrt{8}[$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_N(x)}{f(x)} + \frac{V_N(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{g_N(x)}{f(x)} + \frac{V_N(x)}{U_N(x)} \frac{U_N(x)}{f(x)}$$

$$\boxed{\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_N(x) - f_N(x)}{f(x)} + \frac{V_N(x)}{U_N(x)}}$$

Or $\left|\frac{g_N(x) - f_N(x)}{f(x)}\right| \leq \frac{2A}{f(x)}$ donc $\lim\limits_{x \to 3-2\sqrt{2}} \frac{g_N(x) - f_N(x)}{f(x)} = 0$

Par conséquent $\exists x_0 \in [0, 3-2\sqrt{2}[\ \forall x > x_0 \ \left|\frac{g_N(x) - f_N(x)}{f(x)}\right| < \varepsilon.$

On en deduit

$\exists x_0 \in [0, 3-2\sqrt{2}[. \ \forall x > x_0 \qquad \lambda - 2\varepsilon < \frac{g(x)}{f(x)} < \lambda + 2\varepsilon$

et en récapitulant

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in [0, 3-2\sqrt{2}[\ (= x_0(\frac{\varepsilon}{2})) \ \forall x > x_1 \quad \lambda - \varepsilon < \frac{g(x)}{f(x)} < \lambda + \varepsilon.$

ce qui veut exactement dire $\boxed{\lim\limits_{x \to 3-2\sqrt{2}} \frac{g(x)}{f(x)} = \lambda}$

6.d) $\lim\limits_{x \to 3-2\sqrt{2}} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 3-2\sqrt{2}} \int_0^{3-2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-6x+x^2}} = \frac{\ln 2}{2}.$

Donc $\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{2}}$

7a) $\boxed{v_n = n^{\alpha} a_n}$ donc $\boxed{a_n = n^{-\alpha} v_n}.$

$$v_{n+1} = (n+1)^{\alpha} a_{n+1} = (n+1)^{\alpha}\left(\frac{3(2n+1)}{n+1} a_n - \frac{n\, a_{n-1}}{n+1}\right)$$

$$= (n+1)^{\alpha-1}(3(2n+1) n^{-\alpha} v_n - (n+1)^{\alpha-1} n(n-1)^{-\alpha} v_{n-1}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 6\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) v_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} v_{n-1}.}$$

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} = 1 + \frac{\alpha-1}{n} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (10)

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{n} + \frac{K_\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{2\alpha-1}{n} + \frac{\Lambda_\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Si on choisit $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient.

$$v_{n+1} = \left(6 + \frac{6K_{1/2}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)v_n - \left(1 + \frac{\Lambda_{1/2}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)v_{n-1}$$

ce qui nous donne bien

$$\boxed{v_{n+1} - 6v_n + v_{n-1} = \frac{1}{n^2}\left(A_n v_n + B_n v_{n-1}\right)}$$

7b) On est en présence d'une récurrence linéaire dont l'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 1$.

Il existe donc λ_+ et λ_- tels que.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \lambda_+ (3+2\sqrt{2})^n + \lambda_- (3-2\sqrt{2})^n$$

les condition. $w_0 = 0$ $w_1 = 3$ donnent

$$\lambda_+ = -\lambda_- = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$\boxed{w_n = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right)}$$

donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n$.

7c) On a déduit $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{\sqrt{n}}.}$

8a) On a vu en 7c que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\, a_n}{(3+\sqrt{8})^n} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} = K_1 > 0$

Il existe donc N_1 tel que

$\forall n \geq N_1$ $\qquad \dfrac{1}{2} K_1 < \dfrac{\sqrt{n}\, a_n}{(3+\sqrt{8})^n} < 2K_1.$

le résultat demandé en découle car $(3+\sqrt{8})^n = e^{nu}$.

8b) $$\lambda - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{b_k}{a_k}$$

Or $$\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{b_k}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_{k+1} a_k}\right) = O\left(k e^{-2ku}\right)$$

Or pour tout $a \in [0,2[$ $\qquad k e^{-2ku} = O\left(e^{-aku}\right)$

Les séries considérées étant à termes positifs, le théorème de sommation des équivalents donne.

$$\lambda - \frac{b_n}{a_n} = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-aku}\right)$$

$$= O\left(\frac{e^{-nau}}{1-e^{-au}}\right)$$

$$\lambda - \frac{b_n}{a_n} = O\left(e^{-nau}\right)$$

Donc $\exists K_2 \quad \forall n \geq N_1 \qquad 0 \leq \lambda - \dfrac{b_n}{a_n} \leq K_2 e^{-anu}$

8c) Il existe un entier N_2 tel que pour $n \geq N_2$ le cardinal de $P_n = \{p < n,\ p \text{ premier}\}$ soit inférieur à $\dfrac{n}{\ln n} \times 1{,}1$.

On a $d_n = \prod\limits_{p\in P_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor} \leq \prod\limits_{p \in P_n} n < n^{1{,}1 \frac{n}{\ln n}} = e^{1.1 n}$

8.d) Dans ce qui suit on suppose $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$ pour que toutes les inégalités soient vérifiées pour n.

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} = \lambda - \frac{a_n}{b_n} \leq K_2 e^{-anu} \leq \frac{K_2 e^{-anu}}{q_n^{r+1}} q_n^{r+1}$$

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_2 e^{-anu}}{q_n^{r+1}} (a_n d_n)^{r+1} \leq \frac{K_2 e^{-anu}}{q_n^{r+1}} \left(2K_1 e^{nu} e^{(1.1)n}\right)^{r+1}$$

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_2 (2K_1)^{r+1} e^{-anu} e^{n(u+1.1)(r+1)}}{q_n^{r+1}}$$

$$\boxed{0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_2 (2K_1)^{r+1} e^{-n(u+1)(a \cdot 0,61 - (r+1))}}{q_n^{r+1}}}$$

Pour obtenir l'inégalité voulue il suffit de prendre $a = \frac{1,2}{0,61} \in]0,2[$ et $r = 0,2 > 0$.

8.e) Si λ est rationnel $\lambda = \frac{p}{q}$ donc.

$$\left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{p\, q_n}.$$

Or $|pq_n - p_n q| \geq 1$ si $pq_n - p_n q \neq 0$ c'est-à-dire si $\lambda \neq \frac{p_n}{q_n}$

Donc si $\lambda \neq \frac{p_n}{q_n}$ $\left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q\, q_n}$.

(On remarquera que puisque $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geq 6} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 6}$ strictement croissante, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda \neq \frac{p_n}{q_n}$.

8.f) Si λ était rationnel $\lambda = \frac{p}{q}$ on aurait

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{q\, q_n} \leq \left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{K_3}{q_n^{1,2}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq \frac{q K_3}{q_n^{0,2}}.$$

Ce qui est contradictoire car $\lim_{n \to +\infty} \frac{q K_3}{q_n^{0,2}} = 0$