

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DES TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

**MATHÉMATIQUES**

**DEUXIÈME ÉPREUVE**

**FILIERE MP**

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

**L'emploi de la calculatrice est interdit.**

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie :  
MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'établir que le réel  $\ln 2$  est irrationnel.

**1. Fonction  $h$  :**

Soit la série entière de terme général  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  définie par la relation suivante :

$$u_n(x) = \binom{2n}{n} x^n.$$

Rappel : pour tout entier strictement positif  $n$  et tout entier naturel  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p}$  est le cardinal de l'ensemble des parties ayant  $p$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments. Par convention :  $\binom{0}{0} = 1$ .

Soit  $R$  le rayon de convergence de la série entière de terme général  $u_n(x)$  ; la somme  $h$  de cette série entière est la fonction définie à l'intérieur de l'intervalle ouvert  $] -R, R[$  par la relation :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

- Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière de terme général  $u_n(x)$ .
- Démontrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence  $] -R, R[$ , la fonction  $h$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier degré  
$$(1 - 4x)h'(x) = 2h(x).$$
- En déduire l'expression de  $h(x)$  sur l'intervalle ouvert  $] -R, R[$ .

**2. Fonctions  $M_p$  :**

Soit  $p$  un entier strictement positif ( $p \geq 1$ ) ; soit  $M_p$  la fonction définie sur la demi-droite ouverte  $] -\infty, 1[$  par la relation :

$$M_p(x) = \frac{1}{(1-x)^p}.$$

Déterminer le développement en série entière de la fonction  $M_p$  dans un voisinage de 0. Exprimer le coefficient de  $x^k$  à l'aide de  $\binom{p+k-1}{k} \left( = \binom{p+k-1}{p-1} \right)$ .

### 3. Fonction $f$ :

Soit  $f$  la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 6x + x^2}}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  ?

b) Déterminer pour quelles valeurs du réel  $x$  la relation suivante

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

est vérifiée. En déduire que, dans un voisinage de 0, la fonction  $f$  est égale à la somme d'une série de fonctions  $f_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , définies par la relation :

$$f_n(x) = \lambda_n M_{2n+1}(x) x^n.$$

Les  $\lambda_n$  sont des scalaires qui seront déterminés ; il vient par suite :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n M_{2n+1}(x) x^n.$$

c) Déduire des résultats précédents l'existence d'un développement en série entière de la fonction  $f$  dans un voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exprimer chaque coefficient  $a_n$  à l'aide de la somme d'une série. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général  $a_n x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

d) Démontrer que la fonction  $f$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0,$$

dans laquelle les deux fonctions  $a$  et  $b$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Les déterminer.

e) En déduire que les coefficients  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  du développement en série entière de la fonction  $f$  vérifient, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence (**R**) suivante :

$$(\mathbf{R}) \quad \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + na_{n-1} = 0.$$

Déterminer les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ .

### 4. Fonction $g$ :

Le but de cette question est la recherche d'une fonction  $g$  qui possède les deux propriétés :

i. les valeurs de  $g(0)$  et de  $g'(0)$  sont données par les relations suivantes :

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1.$$

ii. le réel  $g(x)$  est la somme d'une série entière de terme général  $b_n x^n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , dont les coefficients  $b_n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , vérifient la relation de récurrence suivante :

$$(\mathbf{R}) \quad \forall n \geq 1, (n+1)b_{n+1} - 3(2n+1)b_n + nb_{n-1} = 0.$$

a) Démontrer que les coefficients  $b_n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , sont bien déterminés ; calculer  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .

En supposant le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n x^n$ ,  $n = 0, 1, 2$ , strictement positif, déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction  $g$ .

b) Établir la relation :

$$g(x) = f(x) \cdot \int_0^x f(t) \, dt.$$

c) En déduire l'expression de chaque coefficient  $b_n$  au moyen des coefficients  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . En déduire une minoration du rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

d) Soit  $n$  un entier strictement positif; soit  $d_n$  le plus petit commun multiple des  $n$  premiers entiers  $1, 2, \dots, n$ . Démontrer que le réel  $d_n \cdot b_n$  est un entier relatif :  $(d_n \cdot b_n \in \mathbb{Z})$ .

5. **Étude des suites**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

Soit  $(u_n)_{n=1,2,\dots}$  la suite des réels définis par la relation suivante : pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$u_n = b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n.$$

a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . Exprimer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, le terme  $u_{n+1}$  en fonction de l'entier  $n$  et de  $u_n$ . Étudier le signe des réels  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , et la monotonie de cette suite. Déterminer le plus petit des majorants  $C$  de cette suite.

b) Démontrer que la suite des nombres réels  $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et strictement croissante; déterminer, pour tout entier  $n$  strictement positif une majoration de la différence

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$$

à l'aide de la constante  $C$  et des deux réels  $a_n$  et  $a_{n-1}$ . En déduire que la suite  $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Soit  $\lambda$  la limite de cette suite :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

6. **Détermination de la limite  $\lambda$  :**

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif donné. D'après la question précédente, il existe un entier  $N$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , le rapport  $b_n/a_n$  est encadré par  $\lambda - \varepsilon$  et  $\lambda + \varepsilon$  :

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

a) Démontrer que, lorsque le réel  $x$  tend vers  $3 - \sqrt{8}$  par valeurs inférieures, les deux fonctions  $f$  et  $g$  croissent vers l'infini.

Soient  $f_N, g_N, U_N$  et  $V_N$  les fonctions définies par les relations suivantes :

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad g_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n, \quad U_N(x) = f(x) - f_N(x), \quad V_N(x) = g(x) - g_N(x).$$

b) Démontrer, lorsque le réel  $x$  est compris entre 0 et  $3 - \sqrt{8}$  ( $x \in [0, 3 - \sqrt{8}]$ ), l'encadrement suivant :

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{V_N(x)}{U_N(x)} \leq \lambda + \varepsilon$$

c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $N$  donné, il existe une constante  $A$  qui majore les deux fonctions  $f_N$  et  $g_N$  sur le segment  $[0, 3 - \sqrt{8}]$ .

En déduire que la fonction  $x \mapsto g(x)/f(x)$  a pour limite  $\lambda$  lorsque le réel  $x$  tend vers  $3 - \sqrt{8}$  par valeurs inférieures.

d) Déterminer le réel  $\lambda$  en admettant la relation ci-dessous

$$\int_0^{3-\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{1-6x+x^2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

7. **Un équivalent du réel  $a_n$  à l'infini :**

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif donné; soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des réels définis par la relation suivante :

$$v_n = n^\alpha \cdot a_n.$$

- a) Démontrer qu'il est possible de choisir le réel  $\alpha$  et deux suites  $(A_n)_{n \geq 1}$  et  $(B_n)_{n \geq 1}$ , qui ont chacune, lorsque l'entier  $n$  croît vers l'infini, une limite finie, tels que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence suivante

$$v_{n+1} - 6v_n + v_{n-1} = \frac{1}{n^2} (A_n \cdot v_n + B_n \cdot v_{n-1}).$$

- b) Soit  $(w_n)_{n=0,1,2,\dots}$  la suite qui vérifie les relations suivantes

$$w_0 = 0, w_1 = 3, \forall n \geq 1, w_{n+1} - 6w_n + w_{n-1} = 0.$$

Déterminer les réels  $w_n$ ; en déduire un infiniment grand équivalent à  $w_n$  à l'infini.

- c) En admettant que les deux réels  $v_n$  et  $w_n$  sont équivalents à l'infini, en déduire un infiniment grand équivalent à  $a_n$  lorsque l'entier  $n$  croît indéfiniment.

## 8. Le réel $\ln 2$ n'est pas rationnel :

Soit  $u$  le réel défini par la relation :

$$u = \ln(3 + \sqrt{8}).$$

- a) Démontrer l'existence d'un entier  $N_1$  et d'une constante positive  $K_1$ , tels que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N_1$ , il vienne :

$$\frac{1}{2} K_1 \frac{e^{nu}}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq 2K_1 \frac{e^{nu}}{\sqrt{n}}.$$

- b) À l'aide de la majoration démontrée à la question 5.d, établir qu'étant donné un réel  $a$  strictement compris entre 0 et 2 ( $0 < a < 2$ ), il existe une constante  $K_2$ , telle que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N_1$ , l'encadrement ci-dessous a lieu :

$$0 \leq \lambda - \frac{b_n}{a_n} \leq K_2 e^{-anu}.$$

- c) Il est admis que le nombre  $N(n)$  des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier  $n$  donné est un infiniment grand équivalent à  $\frac{n}{\ln n}$  :

$$N(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

En déduire qu'il existe un entier  $N_2$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N_2$  ( $n \geq N_2$ ), la relation ci-dessous ait lieu

$$d_n \leq e^{1,1 \cdot n}.$$

- d) Soit  $p_n$  et  $q_n$  les entiers (premiers entre eux) définis par les relations suivantes :

$$p_n = d_n \cdot b_n; \quad q_n = d_n \cdot a_n.$$

Démontrer l'existence d'un réel  $r$ , strictement positif, d'une constante  $K_3$  et d'un entier  $N_3$  tels que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N_3$ , l'encadrement ci-dessous ait lieu.

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_3}{(q_n)^{r+1}}.$$

Le résultat ci-dessous est admis :

$$0,61 < \frac{u}{u+1,1} < 0,62.$$

- e) Démontrer que, si  $\lambda$  est rationnel, il existe une constante  $L$ , strictement positive, ne dépendant que du rationnel  $\lambda$ , pour laquelle l'inégalité ci-dessous est vérifiée.

$$\left| \lambda - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{L}{q_n}.$$

- f) En déduire que le réel  $\ln 2$  est irrationnel.

FIN DU PROBLÈME