# Deuxième partie

**II.1)** On a $0 \leq U_0(x,y) \leq U_0(x',y')$, $0 \leq U_1(x,y) \leq U_1(x',y')$.
Par récurrence, en utilisant la croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on prouve $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n(x,y) \leq U_n(x',y')$
et par passage à la limite $\quad \lambda(x,y) \leq \lambda(x',y')$

**II.2a)** L'énoncé ne précise pas que $\varepsilon$ est un réel strictement positif. Nous le supposerons néanmoins. D'ailleurs le résultat est faux si $\varepsilon < 0$

Il suffit de prouver $U_{N+1}(x',y') \geq U_{N+1}(x,y) + \varepsilon$, le même procédé permettant d'étendre le résultat par récurrence.

$$U_{N+1}(x',y') = \frac{U_N^2(x',y') + U_{N-1}^2(x',y')}{2}$$

$$\geq \frac{U_N^2(x,y) + U_{N-1}^2(x,y)}{2} + \varepsilon\left(U_N(x,y) + U_{N-1}(x,y)\right) + \varepsilon^2$$

$$\geq U_{N+1}(x,y) + \varepsilon \max\left(U_N(x,y), U_{N-1}(x,y)\right)$$

$$U_{N+1}(x',y') \geq U_{N+1}(x,y) + \varepsilon$$

(car $\max\left(U_N(x,y), U_{N-1}(x,y)\right) \geq 1$ puisque $\lambda(x,y) = 1$ )

**II.2b)**

- Si $x \leq x'$, $y \leq y'$ $\quad (x,y) \neq (x',y')$
  - Si $x < x'$ alors, que $y = y'$ ou $y < y'$, on aura : $U_2(x',y') > U_2(x,y)$ puis $U_3(x',y') > U_3(x,y)$
  - Si $x = x'$ alors $y < y'$ et on aura : $U_1(x',y') > U_1(x,y)$ puis $U_2(x',y') > U_2(x,y)$ puis $U_3(x',y') > U_3(x,y)$.

Dans les deux cas, en choisissant
$$\varepsilon = \min\left(U_3(x',y') - U_3(x,y),\ U_2(x',y') - U_2(x,y)\right)$$

on aura

$$U_2(x',y') \geq U_2(x,y)+\varepsilon \quad \text{et} \quad U_3(x',y') \geq U_3(x,y)+\varepsilon$$

On en déduit d'après la question précédente.

$$\forall n \geq 2 \quad U_n(x',y') \geq U_n(x,y)+\varepsilon$$

et par passage à la limite

$$\lambda(x',y') \geq \lambda(x,y)+\varepsilon = 1+\varepsilon$$

et par conséquent $\underline{\lambda(x',y') = +\infty}$

- $\underline{\text{Si } x \geq x' \quad y \geq y'}$ $(x,y) \neq (x',y)$ alors

$$\lambda(x',y') \leq \lambda(x,y) = 1$$

Si $\lambda(x',y') = 1$, d'après première partie de la question $\lambda(x,y) = +\infty$, ce qui est contradictoire. Donc $\underline{\lambda(x',y')=0}$

II.3.a) $\lambda(0,0)=0$ donc $\mathcal{E} = \{x, \lambda(x,0)=0\} \neq \emptyset$
$\lambda(2,0)=+\infty$, puis $\forall x \geq 2 \quad \lambda(x,0) = +\infty$.
donc $\mathcal{E}$ est majoré et $\mathcal{E}$ possède bien une borne supérieure

II.3.b) Si $0 \leq x < a$ $\exists y \in \mathcal{E}$ $x < y \leq a$. donc

$$0 \leq \lambda(x,0) \leq \lambda(y,0) = 0$$

Donc $\underline{\forall x \in [0, a[ \quad \lambda(x,0) = 0}$

II.4.a) $x \mapsto U_n(x,0)$ est polynomiale donc continue.

II.4.b) Si $U(a,0)$ tend vers $0$ il existe un $n$ tel que

$U_n(a,0) < 1$ $\quad U_{n-1}(a,0) < 1$.

L'ensemble des $x$ tels que $\max(U_n(x,0), U_{n-1}(x,0)) < 1$ est un ouvert car $x \mapsto \max(U_n(x,0), U_{n-1}(x,0))$ est continue. Il est non vide car il contient $a$.

~~Il existe~~

Il existe donc un $\eta > 0$ tel que

$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[ \cap [0,+\infty[ \quad \max(U_n(x,0), U_{n-1}(x,0)) < 1$

et donc

$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[ \quad \lambda(x,0) = 0$

En particulier $\lambda(a+\frac{\eta}{2}, 0) = 0$.

Ceci contredit la définition de a comme borne supérieure.

II.4.c) le raisonnement est le même il suffit de remplacer $\max(U_n(x,0), U_{n-1}(x,0)) < 1$

par $\min(U_n(x,0), U_{n-1}(x,0)) > 1$

et $a+\varepsilon$ par $a-\varepsilon$.

II.4 d) - Il résulte du b) et du c) que $\lambda(a,0) = 1$.

~~II.4e)~~ - D'après le résultat de la question II.2) $\lambda(x,0) = +\infty$ si $x > a$.

II.4e) A nouveau d'après la question II.2)

$\lambda(a,y) = +\infty$ si $y > 0$.