ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ÉCOLE CENTRALE DE LYON
Concours d'Admission 1989
MATHÉMATIQUES I

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'ÉLECTRICITÉ
ÉCOLE SUPÉRIEURE D'OPTIQUE
M

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.

On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

$$\text{pour tout } n\geq 1,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$$

et telles, de plus, que l'on ait : $U_0\geq 0$ et $U_1\geq 0$.

On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.

Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.

Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ.

Première partie : Généralités

I.1.a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?

c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.

d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.

e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?

I.2. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ appartenant à S et *non constante.*

a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n\geq 2$.

b) Montrer que, s'il existe $N\geq 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

On établirait de même que, s'il existe $N\geq 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.

c) Déterminer les limites des suites $U(x, y)$ pour $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ et pour $x = 2$, $y = 0$.

I.3. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geq N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

On ne cherchera pas, dans cette question à démontrer l'existence de telles suites.

Montrer que les deux suites $(U_{2n})_{n\geq 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont strictement monotones et de sens contraire. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1. On pourra montrer que U_0 et U_1 sont distincts et envisager les deux cas $U_0 < U_1$ et $U_0 > U_1$.

I.4 Établir, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *non constante* appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) II existe un entier $N\geq 0$ tel que $U_N\geq 1$ et $U_{N+1}\geq 1$.

b) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

c) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.
On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété a), tous ses termes sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1.

I.5. Établir de même, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de S *non constante*, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) II existe un entier $N\geq 0$ tel que U_N et U_{N+1} soient inférieurs au sens large à 1.
b) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
c) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers zéro.

I.6 Montrer que E_0, E_1, $E_{+\infty}$ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Deuxième partie

Pour $(x, y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x, y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, y)$.

1. Comparer $\lambda(x, y)$ et $\lambda(x', y')$ dans l'hypothèse où (x, y) et (x', y') vérifient : $x\leq x'$ et $y\leq y'$.
2. On considère deux couples (x, y) et (x', y') éléments de Q. On suppose de plus que $U(x, y)$ converge vers 1.
   a) Montrer que, si l'on a pour un entier N :
   $$U_{N-1}(x, y) + \varepsilon\leq U_{N-1}(x', y') \text{ et } U_N(x, y) + \varepsilon\leq U_N(x'y')$$
   alors, pour tout $n\geq N$, on a : $U_n(x, y) + \varepsilon\leq U_n(x', y')$.
   b) Donner la valeur de $\lambda(x', y')$ dans les deux cas suivants :
   - $x\leq x'$, $y\leq y'$ et $(x, y)\neq(x', y')$.
   - $x\geq x'$, $y\geq y'$ et $(x, y)\neq(x', y')$.
3. a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ borne supérieure de l'ensemble des $x\geq 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul.
   b) Que dire de $\lambda(x, 0)$ pour $0\leq x < a$?
4. a) Montrer que, pour tout n, la fonction $x \mapsto U_n(x, 0)$ est continue.
   b) Montrer que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers zéro, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a + \varepsilon, 0)$ tende vers zéro ; on pourra utiliser pour cela la question (I.5).
   c) Montrer de même que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a - \varepsilon, 0)$ tende vers $+\infty$.
   d) En déduire $\lambda(a, 0)$. Que vaut $\lambda(x, 0)$ pour $x > a$?
   e) Montrer que, pour $y > 0$, la suite $(U_n(a, y))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.