ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2008

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Dénombrement d'applications entre ensembles finis

On se propose de démontrer quelques propriétés du nombre des applications surjectives d'un ensemble fini sur un autre.

Étant donné deux nombres entiers strictement positifs k et n, on note

- $p_{k,n}$ le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$, nul si $k>n$; on rappelle que $p_{k,n}=\binom{n}{k}$ pour $k\leqslant n$;
- $j_{k,n}$ le nombre d'applications injectives de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, nul si $k>n$;
- $s_{k,n}$ le nombre d'applications surjectives de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, nul si $k<n$.

On posera aussi $p_{0,n}=j_{0,n}=1$.

Première partie

1. Préciser les valeurs de $j_{n,n}$ et $s_{n,n}$.

2. Montrer que l'on a $j_{k,n}=\binom{n}{k}k!$ si $k\leqslant n$.

Pour tout entier $r>0$, on note $P(r)$ (resp. $S(r)$) la matrice à r lignes et r colonnes de coefficients $P(r)_{k,n}=p_{k,n}$ (resp. $S(r)_{k,n}=s_{k,n}$) pour $k,n=1,\dots,r$.

3.a) Montrer que l'on a, pour k et $n>0$:

$$n^k=\sum_{q=1,\dots,n} s_{k,q}\,p_{q,n}\ .$$

3.b) Calculer le déterminant de la matrice $A(r)$ de coefficients $A(r)_{k,n}=n^k,\ k,n=1,\dots,r$.

Deuxième partie

Pour tout entier $d > 0$, on désigne par E_d l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients complexes, de degré $\leqslant d$. On le munit de la base $(X^0 = 1, X, \ldots, X^d)$; on définit un endomorphisme T de E_d par

$$T(P)(X) = P(X+1) \quad \text{pour tout } P \in E_d\ .$$

4.a) Déterminer les coefficients $T_{k,n}$ de la matrice représentant T dans le base indiquée (ici $0 \leqslant k,\ n \leqslant d$).

4.b) Même question pour T^{-1} dont on démontrera l'existence.

4.c) Étant donné deux vecteurs lignes $(a_0, \ldots, a_d)$ et $(b_0, \ldots, b_d)$ satisfaisant $a_0 = b_0$ et, pour $n = 1, \ldots, d$,

$$a_n = \sum_{q=0,\ldots,n} b_q \binom{n}{q}\ ,$$

écrire les b_q en fonction des a_n.

4.d) Établir une formule de la forme

$$s_{k,n} = \sum_{q=1,\ldots,n} \lambda_{n,q}\, q^k \binom{n}{q}\ ,$$

où $0 < n \leqslant k$ et où les $\lambda_{n,q}$ sont des coefficients à déterminer.

Dans la suite de cette seconde partie, on définit des éléments N_k de E_d, $k = 0, 1, \ldots, d$, par

$$N_k(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{k!} X(X+1)\cdots(X+k-1) & \text{si } k > 0\ . \end{cases}$$

5. Vérifier que les N_k forment une base de E_d.

6. Démontrer la formule

$$T(N_k) = N_k + T(N_{k-1}) \quad \text{pour } k > 0\ .$$

7.a) Déterminer les coefficients $\widetilde{T}_{k,q}$ $(k, q = 0, \ldots, d)$ de la matrice représentant l'endomorphisme T dans la base ci-dessus.

7.b) Même question pour les coefficients de T^{-1}.

8. Écrire les formules donnant les polynômes X^k, $k = 0, \ldots, d$, en fonction des polynômes N_k.

[On pourra utiliser la formule de la question **3.a)**.]