Mines Ponts 2020 Mathématiques I PC

Théorème de la limite Centrale

I) Préliminaires

Q1 - $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $|f(t)\,g(x-t)| \leq |f(t)|\,\|g\|_\infty$ $(= f(t)\,\|g\|_\infty)$

$t \mapsto \|g\|_\infty f(t)$ est intégrable (car f est dans $\mathcal{P}$)

Donc $t \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

- De plus $x \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}$ $|f(t)\,g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t) = \varphi(t)$

et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\underline{(f*g) \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$

- Si on effectue le changement de variable $u = x-t$.

On obtient $\underline{(f*g)(x) = (g*f)(x)}$

$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)\,g(u) \times (-du) \right)$

~~PS ... faire le changement de variable~~

Q2. - Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque tendant vers $+\infty$.

Soit $f_n : t \mapsto f(t)\,g(x_n - t)$

- Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $|f_n(t)| \leq f(t)\,\|g\|_\infty = \varphi(t)$
  et φ est intégrable.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée

$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (f*g)(x_n)=0$.

la caractérisation séquencielle de la limite permet d'affirmer

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (f*g)(x)=0}$$

Pour la même raison on aurait $\lim\limits_{x\to-\infty} (f*g)(x)=0$

Rq On peut aussi appliquer simplement le théorème de convergence dominée étendu.

Q3) Ne vérifions que les conditions 1) et 3), comme le suggère l'énoncé :

1) - $\forall x \in \mathbb{R}$ $y \mapsto f(y)\,g(x-y)$ est continue et intégrable puisque g est bornée et f intégrable.

- $\forall y \in \mathbb{R}$ $x \mapsto f(y)\,g(x-y)$ est continue et intégrable car g est intégrable, donc sa translatée $x \to g(x-y)$ aussi

3)
$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dx = f(y)\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\,dx = f(y)\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du = C\,f(y)$$
$(u = x-y \quad dx=du)$

Donc $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dx$ est intégrable car f l'est sur $\mathbb{R}$

1) et 3) (et 2) étant vérifiées on peut appliquer le théorème de Fubini et $f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy$ est intégrable

avec $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dx\right)dy$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\,dx}_{=1}\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy = 1}$$

II) Une classe d'opérateurs sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Q4. Soit u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_f(u)(x) = f * u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$|T_f(u)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, \|g\|_\infty\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \|g\|_\infty\, dt$$

$$|T_f(u)(x)| \leq \|g\|_\infty$$

Donc $T_f(u)$ est bornée et $\|T_f(u)\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

(Ceci exprime que $T_f \in \mathcal{LC}(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire est un endomorphisme continue de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

Q5 $T_f T_g(u) = f*(g*u) = (f*g)*u = (g*f)*u = g*(f*u) = T_g T_f(u)$

Rq. résultat R1

Q6. $T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) = T_{f_2} T_{f_1}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)$

$$= T_{f_2} T_{f_1}(u) - T_{f_2} T_{g_1}(u) + T_{f_2} T_{g_1}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)$$

Or $T_{f_2} T_{g_1}(u) = T_{g_1} T_{f_2}(u)$ et T_{f_2} et T_{g_1} sont linéaires

donc

$$T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) = T_{f_2}\left(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\right) + T_{g_1}\left(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\right)$$

Donc

$$\|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))\|_\infty + \|T_{g_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|$$

$$\|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|$$

(D'après Q4)

Q7 Posons $f_1 = f$ $\quad f_2 = f\circ f = f_1\circ f = f\circ f_1$

puis $f_{p+1} = f_p\circ f = f\circ f_p$.

Alors $T_{f_{p+1}} = T_{f_p} T_f = T_f T_{f_p}$

On peut définir similairement g_p.

Or a alors $(T_f)^r(u) = T_{f_r}(u)$ $\quad (T_g)^r(u) = T_{g_r}$.

D'après la question précédente

$$\|T_f^{(r+1)}(u) - T_g^{(r+1)}(u)\|_\infty \leq \|T_f T_{f_r}(u) - T_g T_{g_r}(u)\|_\infty$$

$$\|T_f^{(r+1)}(u) - T_g^{(r+1)}(u)\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|T_{f_r}(u) - T_{g_r}(u)\|$$

$$\|T_f^{(r+1)}(u) - T_g^{(r+1)}(u)\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|(T_f)^r(u) - (T_g)^r(u)\|_\infty$$

Puisque $\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$

on en déduit alors par récurrence

$$\forall r \in \mathbb{N}^* \quad \|(T_f)^r(u) - (T_g)^r(u)\| \leq r\,\|T_f(u) - T_g(u)\|$$

Remarque $(T_f)^0 = Id$ $\quad (T_f)^0(u) = u$.

Donc le résultat est aussi vrai pour $r = 0$.

$\rightarrow$

III Lois normales

Q8 g_k est continue positive. On admet que g_1 est intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

On peut alors faire le changement de variable $x = \frac{y}{k}$.
On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2k^2}} dy = 1$$

Ce qui prouve que g_k est intégrable d'intégrale égale à 1

Donc g_k est dans $\mathcal{P}$

le changement de variable $x = -y$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2k^2}} dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} (-y) e^{-\frac{y^2}{2k^2}} (-dy)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2k^2}} dy$$

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2k^2}} dx = 0}$

(Rq. l'on peut aussi reconnaître une dérivée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2k^2}} dx = \left[-\frac{k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2k^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$)

Pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,dx$ utilisons une intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx = \left[-\frac{x h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx.$$

Or $\lim_{x \to \pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{2h^2}} = 0$ donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,dx = 0 + h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)\,dx = h^2}$$

Q9 le résultat R2 donne par récurrence

$$(g_h)^{*n} = g_{\sqrt{n}h}.$$

car $\sqrt{(\sqrt{n}h)^2 + h^2} = \sqrt{n+1}\,h$

Donc $\boxed{\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} = T_{g_h}.}$

→

IV. Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Q10) On démontre le résultat par récurrence sur k.

Il est clairement vrai pour $k=0$ avec $\boxed{P_{0,h}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}}$.

On suppose le résultat vrai à l'ordre k, il est alors vrai à l'ordre $k+1$ avec

$$\boxed{P_{k+1,h}(x) = P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x).}$$

On en déduit aussi facilement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \deg P_{k,h} = k}$

Q11) Suivons les indications de l'énoncé

$$P_{k,h}(x-t)\,e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} = \underbrace{\left(P_{k,h}(x-t)\,e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}\right)}_{\alpha(x-t)} e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$$

par croissance comparée $\lim\limits_{u \to \pm\infty} \alpha(u) = 0$ et α est continue sur $\mathbb{R}$ donc α est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\exists M \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |\alpha(u)| \leq M$$

- Pour $|t| \leq 2a$ et $x \in [-a,a]$ $\quad 0 \leq e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1$.
- Pour $|t| \geq 2a$ et $x \in [-a,a]$:

Majoration délicate qui pose toujours des difficultés aux étudiants

$$|t| \geq 2a \qquad |x| \leq a \qquad \text{donc} \quad |x| \leq \frac{|t|}{2}$$

$$\text{donc} \quad |x-t| \geq |t| - |x| \geq \frac{|t|}{2}.$$

Or $u \mapsto u^2$ est ~~continue~~ croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $|x-t|^2 \geq \frac{|t|^2}{4}$

Soit $(x-t)^2 \geq \frac{t^2}{4}$

$$-\frac{(x-t)^2}{4k^2} \leq -\frac{t^2}{16}$$

$$e^{-\frac{(x-t)^2}{4k^2}} \leq e^{-\frac{t^2}{16}}.$$

Finalement :

$$\exists M \ \forall t \in \mathbb{R} \ \forall x \in [-a,a] \ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2k^2}} \right| \leq \begin{cases} M & \text{si } t \in [-2a, 2a] \\ M e^{-\frac{t^2}{6}} & \text{si } |t| \geq 2a \end{cases}$$

On pose $\varphi_k(t) = \begin{cases} M & \text{si } |t| \leq 2a \\ M e^{-\frac{t^2}{6}} & \text{si } |t| > 2a \end{cases}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \forall x \in [-a,a] \ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2k^2}} \right| \leq \varphi_k(t)$$

et φ_k est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

intégrable car $\varphi_k(t) = \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Q12 $T_{g_k}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x-t) u(t)\, dt$

Il suffit maintenant de vérifier les ~~théorèmes de~~ hypothèses du théorème de dérivation sous l'intégrale.

- On pose $\beta(x,t) = g_k(x-t) u(t)$.
- Soit $a > 0$

- $\forall x \in [-a, a]$ $\beta(x, \cdot)$ est continue (par morceaux) et intégrable (déjà vu).

(1) - $\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,t) = g_k'(x-t)u(t)$ existe sur $[-a,a]\times\mathbb{R}$.

∘ $\forall x \in [-a,a]$ $t \mapsto \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,t)$ est continue (par morceaux)

∘ $\forall t \in \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-a,a]$

(2) ∘ $\exists\, \varphi_1$ continue par morceaux et intégrable telle que $\forall (x,t) \in [-a,a]\times\mathbb{R}$ $\left|\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_1(t)$

(d'après la question précédente).

les hypothèses du théorème sont vérifiées. On peut donc affirmer que $T_{g_k}(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$, pour tout $a>0$ donc sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(T_{g_k}(u)\right)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k'(x-t)u(t)\,dt$$

—

On démontrerait de même que $T_{g_k}(u)$ est classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Dans (1) remplacer $\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,t)$ par $\frac{\partial^k \beta}{\partial x^k}(x,t)$ $\left(= g_k^{(k)}(x-t)u(t)\right)$

et dans (2) remplacer φ_1 par φ_k.

—

Q13 Correction rectifiée.

D'après Q12 on sait que $T_{g_k}(u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\frac{d^k}{dx^k}(T_{g_k}(u)(x)) = T_{g_k^{(k)}}(u)(x)$ où $g_k^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de g_k.

Or sait aussi que $g_k^{(k)}(x) = P_{k,k}(x) e^{-\frac{x^2}{2k^2}}$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 g_k^{(k)}(x) = 0$. C'est-à-dire $g_k^{(k)}(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Il en résulte que $g_k^{(k)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

Il ne reste plus qu'à généraliser le résultat de Q2 et à prouver que si g est intégrable et u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ alors ~~g*u~~ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g * u(x) = 0$

la démonstration est la même, le f de Q2 est le g d'ici le g de Q2 le u d'ici.

la majoration de $f(t) g(x_n - t)$ de la question Q2 est remplacée par
$$|g(t) u(x_n - t)| \leq \|u\|_\infty g(t) = \varphi(t)$$

et φ est continue par morceaux et intégrable.

(la seule différence est qu'on a ici
$$\int_{\mathbb{R}} \|u\|_\infty g = \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}} g \quad \text{et ne pas} \quad \int_{\mathbb{R}} \|u\|_\infty g = \|u\|_\infty.$$

~~Q13 $\left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = T_{g_h^{(k)}}(u)(x)$.~~

~~Or $g_h^{(k)}$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (vu en Q11).~~

~~Il suffit donc d'appliquer le résultat de Q21 aux~~

~~obtenir $\forall k \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = 0$~~

~~et $\boxed{T_{g_h}(u) \text{ est bien dans } \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})}$.~~

Q14 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2h^2}}\,dt$.

On effectue le changement de variable $t = hs$.

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{h}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}}_{g_1(s)}\,ds.$$

Or $\lim_{h \to 0} \frac{\alpha}{h} = +\infty$ et g_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc $\boxed{\lim_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt = 0}$

De même $\boxed{\lim_{h \to 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\,dt = 0}$

Q15 le résultat qu'on demande d'admettre est la continuité uniforme de tout élément de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h > 0$

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, u(x-t)\, dt \quad - u(x)$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, dt = 1$ donc $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, u(x)\, dt$ et

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, (u(x-t) - u(x))\, dt$$

D'après le résultat admis —

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \alpha$ $\forall t$ $|t| \le \alpha$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|u(x-t) - u(x)| \le \frac{\varepsilon}{4}$

(car $|x - t - x| = |t|$)

De plus u est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ donc elle est bornée

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |g_h(t)|\, |u(x-t) - u(x)|\, dt$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\, |u(x-t) - u(x)|\, dt \quad (\text{car } g_h(t) \ge 0)$$

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, 2\|u\|_\infty + \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)\, \frac{\varepsilon}{4} dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, 2\|u\|_\infty\, dt$$

Or $\int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)\, dt \le 1$. Donc

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \underbrace{2\|u\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, dt \right)}_{= R_h \text{ qui tend vers } 0 \text{ lorsque } h \text{ tend vers } 0^+}$$

Donc $\exists h_0 \ \forall h \in]0, h_0[\ 0 < R_h \le \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad |T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \frac{3\varepsilon}{4}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall h < h_0 \ |T_{g_h}(u)(x) - u(x)| = \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \le \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_0 \ \forall h \in]0, h_0[\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |T_{g_h}(u)(x) - u(x)| = \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \le \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$

Ceci veut bien dire $\lim_{h \to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$

Q16 On sait que $\lim_{r\to+\infty} \|T_{f_r}(v)-T_f(v)\|_\infty = 0$

pour toute fonction v de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et on voudrait

$\lim_{r\to+\infty} \|T_{f_r}(u)-T_f(u)\|_\infty$ pour toute fonction u de

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Soit u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, alors $\forall h>0$ $T_{g_h}(u)$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$T_{f_r}(u)-T_f(u) = T_{f_r}(u) - T_{f_r}(T_{g_h}(u)) + T_{f_r}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u)) + T_f(T_{g_h}(u)) - T_f(u)$$

Donc

$$\|T_{f_r}(u)-T_f(u)\|_\infty \leq \|T_{f_r}(u) - T_{f_r}(T_{g_h}(u))\|_\infty + \|T_{f_r}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty$$
$$+ \|T_f(T_{g_h}(u)) - T_f(u)\|_\infty$$

$$\|T_{f_r}(u)-T_f(u)\|_\infty \leq \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty + \|T_{f_r}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty$$
$$+ \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty$$

(D'après Q4)

Or $\lim_{h\to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$

Soit $\varepsilon>0$ $\exists h_0$ $\|T_{g_{h_0}}(u) - u\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$

Fixons un tel h_0

$$\|T_{f_r}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_{f_r}(T_{g_{h_0}}(u)) - T_f(T_{g_{h_0}}(u))\|_\infty$$

Or $T_{g_{h_0}}(u)$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, donc d'après

les hypothèses $\lim_{r\to+\infty} \|T_{f_r}(T_{g_{h_0}}(u)) - T_f(T_{g_{h_0}}(u))\|_\infty = 0$

Il existe donc r_0 tel que

$$\forall r \geq 0 \quad \| T_{f_r}(T_{g_{t_0}}(u)) - T_f(T_{g_{t_0}}(u)) \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en conclusion
$\forall u \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r_0 \ \forall r \geq r_0 \quad \| T_{f_r}(u) - T_f(u) \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

c'est-à-dire $\quad \lim\limits_{r \to +\infty} \| T_{f_r}(u) - T_f(u) \|_\infty = 0$

Rq C'est bien la convergence faible de (f_r) vers f.

Rq Certains auront peut-être reconnu la démonstration du théorème de permutation des limites.

Q17 On écrit la formule de Taylor Young en x à l'ordre 2

$$u(x-t) = u(x) - t u'(x) + \frac{t^2}{2} u''(x) + o(t^2).$$

Donc $\quad \dfrac{u(x-t) - u(x) + t u'(x)}{t^2} = \dfrac{u''(x)}{2} + o(1)$

et $\quad \boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{u(x-t) - u(x) + t u'(x)}{t^2} = \dfrac{u''(x)}{2}}.$

ce qui prouve que le prolongement par continuité est possible

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u''(x) f_r^\#(t)\, dt = u''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f_r^\#(t)\, dt = u''(x).$$

$$(3) \quad \boxed{-\frac{1}{2} u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} u''(x)\right) f_r^\#(x).}$$

14

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)-u(x)+t\,u'(x)}{t^2} f_r^{\#}(t)\,dt \quad \text{vaut}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)-u(x)+t\,u'(x)}{t^2}\, r\, t^2 f_r(t)\,dt \quad \text{soit}$$

$$\underbrace{r\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)\, f_r(t)}_{= T_{f_r}(U)} - r\, u(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt}_{=1} + r\, U'(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_r(t)\,dt}_{=0}$$

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)-u(x)+t\,u'(x)}{t^2} f_r^{\#}(t)\,dt = r\left(T_{f_r}(U)(x) - u(x)\right)$$

le résultat demandé découle de (3) et (4).

—

Q18 Pour procéder comme à la question Q15, on a besoin d'une convergence uniforme en x de $\frac{u(x-t)-u(x)+t\,u'(x)}{t^2}$ vers $\frac{u''(x)}{2}$ ~~ind~~ lorsque t tend vers 0^*.

Pour cela on utilise la majoration de Taylor-Lagrange puisque u est de classe $\mathcal{C}^3$ et que u''' est bornée sur $\mathbb{R}$ car dans $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left|u(x-t)-u(x)+t\,u'(x)-\frac{t^2}{2}u'(x)\right| \leq \frac{|t|^3}{6} M_3$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$

(5) $$\left| \frac{u(x-t)-u(x)+t\,U'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2}\right| \leq M_3|t| < \varepsilon/4$$

La formule de Taylor-Lagrange avec majoration du reste à l'ordre 2 donne

$$\left| u(x-t) - u(x) + t\,u'(x) \right| \leq \frac{1}{2} M_2 t^2 \quad \text{où } M_2 = \|u''\|_\infty$$

Donc $$\left| \frac{u(x-t) - u(x) + t\,u'(x)}{t^2} - \frac{1}{2} u''(x) \right| \leq \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_2 = M_2$$

(indépendant de x et de t)

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit α pour obtenir (5)

Comme dans la question Q 15 on obtient

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2} u''(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} M_2\, f_n^{\#}(t)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varepsilon}{4} f_n^{\#}(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} M_2\, f_n^{\#}(t)\,dt$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varepsilon}{4} f_n^{\#}(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,dt = \int_{\alpha}^{+\infty} n t^2 \sqrt{n}\, f(\sqrt{n}\, t)\,dt = \int_{\sqrt{n}\,\alpha}^{+\infty} u^2 f(u)\,du$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,dt = 0$

De même $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^{\#}(t)\,dt = 0$

Donc $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad M_2 \int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^{\#}(t)\,dt + M_2 \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2} u''(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

⚠ attention à l'ordre !

Ce qui veut bien dire $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| n\left(T_{f_n}(u) - u\right) - \frac{1}{2} u'' \right\|_\infty = 0}$

Q19 On a

$$\| T^n_{f_r}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \| T^n_{f_r}(u) - T^n_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) \|_\infty$$

$$\leq n \| T_{f_r}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)\|_\infty$$

$$\leq \| \left(n (T_{f_r}(u) - u) - \frac{u''}{2}\right) - \left(n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{u''}{2}\right) \|_\infty$$

$$\| T^n_{f_r}(u) - T_{g_1}(u) \|_\infty \leq \| n(T_{f_r}(u) - u) - \frac{u''}{2}\|_\infty + \| n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{u''}{2}\|_\infty$$

Or $g_{1/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}} = \sqrt{n}\, g_1(\sqrt{n}x)$

et g_1 est dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

et $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_1(t)\, dt = 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_1(t)\, dt = 1$.

(d'après Q8).

Donc g_1 vérifie les mêmes hypothèses que f et, par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \| n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{1}{2} u''\|_\infty = 0$ et

$\lim_{n\to+\infty} \| T^n_{f_r}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$ pour tout u de $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$.

D'après la question 16) puisque $T^n_{f_n}(u) = T_{f_r^{*n}}(u)$ cela prouve que $\boxed{(f_r^{*n})_{n\geq 1} \text{ converge faiblement vers } g_1}$

FIN DU PROBLEME ORIGINAL

questions supplémentaires

R1) $(f,g) \in \mathcal{P}^2 \quad u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

On sait que $g \star u$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ donc $f\star(g\star u)$ est bien définie et de même, puisque $(f\star g)$ est dans $\mathcal{P}$ $(f\star g)\star u$ est bien définie.

$$f\star(g\star u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\, u(x-t-s)\, ds\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(s)\, u(x-t-s)\, ds\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\, g(s'-t)\, u(x-s')}_{F(t,s')}\, ds'\right) dt$$

Changement de variables $s = s'-t$.

les hypothèses 1) et 2) d'existence et de continuité des intégrales se vérifient comme en Q1, Q2 et Q3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t,s')|\, dt = |u(x-s')|\ (f\star g)(s')$$

existe et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t,s')|\, ds\right) dt = (f\star g)\star |u|\ (x) \text{ existe}$$

On peut donc permuter les intégrales et !

$$f * (g * u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(t, s') \, dt \right) ds'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(s') \, u(x - s') \, ds'$$

$$\boxed{f * (g * u)(x) = ((f * g) * u)(x)}$$

Donc $\boxed{f * (g * u) = (f * g) * u}$

R2

$$g_{R_1} * g_{R_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R_1 R_2 2\pi} e^{-\frac{t^2}{2R_1^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2R_2^2}} dt$$

$$e^{-\frac{t^2}{2R_1^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2R_2^2}} = e^{-\frac{1}{2}\left(t^2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) - 2x\frac{t}{R_2^2} + \frac{x^2}{R_2^2}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2 R^2}{R_1^2 R_2^2} - \frac{2xt}{R_2^2} + \frac{x^2}{R_2^2}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2 R_2^2}\left(t^2 - \frac{2x R_1^2 t}{R^2} + \frac{x^2 R_1^2}{R^2}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2 R_2^2}\left(\left(t - \frac{x R_1^2}{R^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{R_1^2}{R^2} - \frac{R_1^4}{R^4}\right)\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2 R_2^2}\left(\left(t - \frac{x R_1^2}{R^2}\right)^2 + x^2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R^4}\right)}$$

$$e^{-\frac{t^2}{2R_1^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2R_2^2}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{R^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{R^2}{R_1^2 R_2^2}\left(t - \frac{x R_1^2}{R^2}\right)^2}$$

On en déduit

$$g_{h_1} * g_{h_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2}} \times \frac{1}{h_1 h_2 2\pi} e^{-\frac{1}{2}\frac{h^2}{h_1^2 h_2^2}\left(t - \frac{x h_1^2}{h^2}\right)^2} dt$$

Un premier changement de variable $t - \frac{x h_1^2}{h^2} = s$ donne

$$g_{h_1} * g_{h_2}(x) = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi h_1 h_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{h^2 s^2}{h_1^2 h_2^2}} ds$$

Un deuxième changement de variable $\frac{h s}{h_1 h_2} = u$ donne

alors

$$g_{h_1} * g_{h_2}(x) = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi h} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, h} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2}}$$

On a bien $\boxed{g_{h_1} * g_{h_2} = g_h}$

R3. u est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists A > 0 \quad \forall x \quad |x| \geq A \qquad |u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

u est continue sur $[-A-1, A+1]$ donc uniformément continue sur ~~cet intervalle~~ ce segment

Donc $\exists \eta \quad \forall (x,y) \in [-(A+1), A+1] \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon$

et on peut supposer $\eta < 1$, quitte à le remplacer par $\min(\frac{1}{2}, \eta)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x-y| < \eta$.

Si $x > A+1$ ou $y > A+1$ alors $x \geq A$ et $y \geq A$ car $\eta < 1$.

Donc $|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

De même si $x < -(A+1)$ ou $y < -(A+1)$.

Si $(x,y) \in [-(A+1), (A+1)]$ alors $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon$

R4. Totalement trivial. La positivité et la continuité de f_n et $f_n^{\#}$ sont évidentes et le changement de variable $y = \sqrt{n}\, x$ donne immédiatement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{\#}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy = 1$$