CCS 2014 MP Mathématiques I (légèrement modifiée)

Partie I

1) Chaque coefficient de $P(A)$ est une fonction polynomiale des coefficients de A. $M_d(\mathbb{R})$ et $M_d(\mathbb{C})$ étant de dimension finie f_P est donc continue.

2) Soit $b : (A,B) \mapsto tr({}^tAB)$.

- b est une application de $M_d(\mathbb{R}) \times M_d(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$
- b est bilinéaire car le produit matriciel est bilinéaire, la trace et la transposée sont linéaires
- b est symétrique car $tr({}^tBA) = tr({}^t({}^tAB)) = tr({}^tAB)$
- b est positive car $b(A,A) = \sum_{1 \leq i,j \leq d} A_{i,j}^2$
- b est définie car $b(A,A) = 0 \Rightarrow \forall i,j \quad A_{i,j} = 0$
  $b(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0$

Ces cinq propositions permettent d'affirmer que b est un produit scalaire.

Pour tout A de $M_d(\mathbb{R})$ $\|A\| = \sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq d} A_{i,j}^2}$

3) $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq d} A_{i,j}^2} \geq |A_{i,j}|$ pour tout couple i,j

4) $\|A \times B\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq d} \left(\sum_{k=1}^{d} a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq d} \left(\left|\sum_{k=1}^{d} a_{i,k} b_{k,j}\right|\right)^2$

$$\leq \sum_{1 \leq i,j \leq d} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\right)^2 \leq \|B\|^2 \sum_{1 \leq i,j \leq d} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\right)^2$$

$$\|A \times B\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{1 \leq i,j \leq d} |a_{i,j}|^2 = \|B\|^2 \, \|A\|^2$$

puis puisque $\|M\| \geq 0$

$$\|A \times B\| \leq \|B\| \, \|A\| = \|A\| \, \|B\|$$

5) Un raisonnement par récurrence simple permet d'établir. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Partie II

6) Soit N une norme sur $M_d(\mathbb{C})$ (toutes les normes sur $M_d(\mathbb{C})$ sont équivalentes car $M_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie) N induit une norme sur $M_d(\mathbb{R})$. Or toutes les normes sur $M_d(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Il existe donc une constante c telle que $\forall M \in \cancel{\mathbb{R}_d} M_d(\mathbb{R}) \quad N(M) \leq c\|M\|$

Soit $r < R$ et $u_n : \mathcal{B} \longrightarrow M_d(\mathbb{C})$
$A \longmapsto a_n A^n$

. D'après la question 1) chaque u_n est continue sur $\mathcal{B}$

. $\forall A \in \mathcal{B}_r = \{A \in M_d(\mathbb{R}), \|A\| < r\}$ on a

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N(a_n A^n) = |a_n| N(A^n) \leq c|a_n| \|A^n\| \leq c|a_n| \|A\|^n \leq c|a_n| r^n$

Or $\sum_{n \geq 1} c|a_n| r^n \cancel{\|A\|^n}$ converge car $r < R$

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ (et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$) converge normalement et par conséquent uniformément sur $\mathcal{B}_r$.

φ est donc définie et continue sur $\mathcal{B}_r$ pour tout $r < R$ donc sur $\mathcal{B}$, car pour tout A de $\mathcal{B}$ il existe $r < R$ tel que $\mathcal{B}_r$ soit un voisinage de A (Par exemple $r = \frac{R + \|A\|}{2}$).

7) La famille $(A^k)_{0\le k\le 0} = (I_d)$ est libre

La famille $(A^k)_{0\le k\le d^2}$ est liée car c'est une famille de d^2+1 éléments dans un espace de dimension d.

$\{m, (A^k)_{0\le k\le m} \text{ est liée}\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ qui possède un plus petit élément, noté r, et $r \geq 1$.

$(A^k)_{0\le k\le r}$ est liée (A^k)

8) L'unicité de la décomposition résulte de ce que la famille $(A^k)_{0\le k\le r-1}$ est libre.

- l'existence est claire pour $0\le k\le r-1$ (en particulier au moins pour $k=0$). On l'établit par récurrence pour tout entier.

En effet si $(A^k)_{0\le k\le r-1}$ est libre et $(A^k)_{0\le k\le r}$ est liée

donc il existe $(a_0, \ldots, a_{r-1})$ tel que $A^r = \sum_{k=0}^{r-1} a_k A^k$.

Ensuite si $A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$ on aura

$$A^{n+1} = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_{k-1,n} A^k + \lambda_{r-1,n} \sum_{k=0}^{r-1} a_k A^k$$

$$A^{n+1} = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n+1} A^k \quad \text{avec } \lambda_0 = a_0 \lambda_{r-1,n}$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1,n} + a_k \lambda_{r-1,n} \quad \text{pour } 1\le k\le r-1$$

Ceci établit bien le résultat par récurrence.

9) Puisque $(Id_d, A, \ldots, A^{r-1})$ est libre et engendre F c'est une base de F. Il en résulte que N est définie (unicité de l'écriture sur la base d'un élément de F) et est une norme (la vérification des critères ne pose aucune difficulté).

$M_d(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les normes sur $M_d(\mathbb{C})$ sont équivalentes. Donc il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $N \leq C \|.\|$ ce qui veut exactement dire, une fois particularisé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|$$

10) On aura en particulier $\forall k \in [0, r-1] \quad |\lambda_{k,n}| \leq C\|A^n\|$

et donc $\forall k \in [0, k-1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ |\lambda_{k,n}| \leq C\|A\|^n$.

Or $\sum_{k \geq 1} C\|A\|^n$ est convergente donc $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument donc convergente.

11) Pour toute k dans $[0, r-1]$ il existe $\lambda_k = \lim_{n \to +\infty} \lambda_{k,n}$.

Par linéarité du passage à la limite.

$$\lim_{n \to +\infty} A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k A^k \in \Gamma$$

On obtient ainsi l'existence d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\lim_{n \to +\infty} A^n = P(A)$

~~est~~ Un tel polynôme est unique car

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \quad (P-Q)(A) = 0$$

implique $P - Q = 0$ ~~puis~~ $P = Q$ car

$$(I_d, \quad , A^{r-1}) \text{ est libre et}$$

$$\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k A^k = 0$$

implique :

$$\forall k \quad \alpha_k = 0$$

12) $P^2 = P$ donc $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k} A^k = I_d + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\right) A$

Donc $\varphi(A) = I_d + (e-1) A$.

13) Si on se limite à $M = \lambda I_d$ on obtient
$\varphi(\lambda) = P(\lambda) I_d = e^{\lambda} I_d$ pour tout λ réel.

On doit donc avoir $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $P(\lambda) = e^{\lambda}$, ce qui est impossible car $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} P(\lambda) = 0$, alors qu'on vaudrait $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} P(\lambda) = 1$.

Par conséquent il n'existe pas de P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$ $P(A) = \varphi(A)$.

Partie III

14) L'énoncé du théorème est :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes de nombres complexes, alors $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

15) Dans le sujet original on demandait juste d'énoncé l'extension de ce théorème aux séries de matrices.

le théorème étendu est :

Soit $\sum_{n\geq 0} A_n$ et $\sum_{n\geq 0} B_n$ deux séries absolument convergentes de matrices, c'est à dire telles que $\sum_{n\geq 0} N(A_n)$ et $\sum_{n\geq 0} N(B_n)$ convergent, alors $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}\right)$ est absolument convergente (et donc convergente car $M_d(\mathbb{C})$) est de dimension finie. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$

+ Dans l'indication donnée on utilise la notation $\| \;\|$ qui crée une confusion avec la norme sur $M_d(\mathbb{R})$.

Il vaut mieux utiliser la nation N pour une norme sur $M_d(\mathbb{C})$.

On a vu à la question 6) qu'il existe une constante c tel que $\forall (A,B) \in (M_d(\mathbb{C}))^2$ $N(AB) \leq c N(A) N(B)$

- Première étape

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq N\left(\sum_{k=0}^{n} A_p B_{n-p}\right) \leq \sum_{p=0}^{n} N(A_p B_{n-p})$$

$$0 \leq N\left(\sum_{k=0}^{n} A_p B_{n-p}\right) \leq c \sum_{p=0}^{n} N(A_p) N(B_{n-p})$$

Mais d'après le résultat sur les séries de nombres complexes la série $\sum_{n\geq 0} \sum_{p=0}^{n} N(A_p) N(B_{n-p})$ est convergente.

le théorème sur la comparaison des séries affirme que

$$\sum_{n\geq 0} N\left(\sum_{k=0}^{n} A_p B_{n-p}\right) \text{ converge.}$$

ce qui est bien la convergence ~~uniforme~~ absolue de $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}\right)$.

. Deuxième étape

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right) = \sum_{\substack{0\leq p,q\leq N \\ p+q>N}} A_p B_q$$

donc

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad N\left(\left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)\right) \leq c \sum_{\substack{0\leq p,q\leq N \\ p+q>N}} N(A_p) N(B_q)$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \underbrace{N\left(\left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}\right)\right)}_{\alpha_N} \leq c \underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{N} N(A_n) \sum_{n=0}^{N} N(B_n) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{n} N(A_p) N(B_{n-p})\right)\right\}}_{\beta_N}$$

D'après le théorème sur les séries de nombres complexes $\lim_{N\to+\infty} \beta_N = 0$

donc $\lim_{N\to+\infty} \alpha_N = 0$. Puisque les trois séries sont convergentes :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}\right).$$

P.S. Mille excuses pour le N qui désigne tantôt une norme, tantôt un entier. Mais le contexte permet de savoir.

16) La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini, donc $\exp(iA)$ est définie pour tout A de $M_d(\mathbb{R})$ et de plus la série converge absolument.

D'après le résultat de la question 15) on aura donc.

$$\forall (A,B) \in M_d(\mathbb{R})^2 \quad \exp(iA)\exp(iB) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{i^p}{p!} A^p \frac{i^{n-p}}{(n-p)!} B^{n-p}$$

$$\underline{\exp(iA)\exp(iB) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^p B^{n-p} \right)}$$

Si de plus A et B commutent, alors d'après la formule du binôme.

$$\underline{\forall (A,B) \in M_d(\mathbb{R})^2 \quad AB = BA \quad \exp(iA)\exp(iB) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (A+B)^n = \exp(i(A+B))}$$

17) On a

$$\cos A = \frac{1}{2}(\exp(iA) + \exp(-iA))$$

$$\underline{\sin A = \frac{1}{2i} (\exp(iA) - \exp(-iA))}$$

Facilement vérifiable à partir des séries.

$$\cos^2 A = \frac{1}{4} (\exp(iA) + \exp(-iA))(\exp(iA) + \exp(-iA))$$

or A et $-A$ commutent donc.

$$\cos^2 A = \frac{1}{4} (\exp 2iA + \exp 0 + \exp 0 + \exp(-2iA))$$

$$\underline{\cos^2 A = \frac{1}{4} (2 I_d + \exp(2iA) + \exp(-2iA))}$$

De même

$$\sin^2 A = -\frac{1}{4} (\exp(iA) - \exp(-iA))(\exp(iA) - \exp(-iA))$$

$$\underline{\sin^2 A = \frac{1}{4} (2 I_d - \exp(2iA) - \exp(-2iA))}$$

On aura bien $\underline{\cos^2 A + \sin^2 A = I_d}$.

Partie IV

18) Puisque f est continue F existe et plus précisément

$$\forall x \in]-\infty, M[\qquad F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Pour tout (x,y) dans $]-\infty, \frac{M}{2}[^2$ on a.

$$x+y \in]-\infty, M[\qquad x+\alpha \in]-\infty, M[\qquad 2y \in]-\infty, M[\quad 2\alpha \in]-\infty, M[$$

et $\underline{A =} F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha) = \int_{x+\alpha}^{x+y} f(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_{2\alpha}^{2y} f(t)\,dt$

Dans la première intégrale on effectue le changement de variable $t = x+u$, dans la deuxième $t = 2u$

$$A = \int_\alpha^y f(x+u)\,du - \frac{1}{2}\int_\alpha^y f(2u)\,du$$

$$A = \int_\alpha^y f(x+u) - \frac{1}{2}f(2u)\,du = \int_\alpha^y \frac{1}{2}f(2x)\,du = \frac{(y-\alpha)}{2}f(2x)$$

Donc $f(2x) = \frac{2}{y-\alpha}A = 2\,\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}$

19)

On fixe un α dans $]-\infty, \frac{M}{2}[$ puis un y différent de α.

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^0$.

Supposons f de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, alors F est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ donc $x \mapsto f(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, sur $]-\infty, \frac{M}{2}[$ donc f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]-\infty, M[$.

On en déduit par recurrence que f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

20) On dérive, par rapport à x, la relation

$$2f(x+y) = f(2x) + f(2y)$$

il vient $\quad 2f'(x+y) = 2f'(2x)$

puis $\quad \underline{2f''(x+y) = 4f''(2x)}$

On choisit $\underline{y = x}$. $\quad \forall x \in]-\infty, \frac{M}{2}[\quad 2f''(2x) = 4f''(2x)$

donc $\quad \underline{\forall x \in]-\infty, M[\quad f''(x) = 0}$

Par conséquent $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in]-\infty, M[\quad f(x) = \alpha x + \beta$.

<u>L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension deux dont une base est $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.</u>

Partie V

21) La matrice $A = (a)$ de $M_1(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$

On cherche donc les fonctions continues telles que $a \neq 0 \Rightarrow \xi(a) \neq 0$

ξ vérifie cette condition ssi elle est continue et

$\xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*+}$

ou $\quad \xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*-}$

ou $\quad \xi(0) = 0 \quad$ et $\quad \xi(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^*$

Cette triple éventualité pouvant se résumer en $\underline{\xi(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^*}$

22) Si $ad \neq bc$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ c & d & & I_{d-2} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $ad - bc \times 1 \neq 0$ est inversible.

Donc $\begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \xi(0) & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(1) & \xi(0) \\ \vdots & & & \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(c) & \xi(1) \end{pmatrix}$ est inversible.

Ceci impose en particulier que les deux premières colonnes forment un système libre, donc que la matrice

$$\begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \xi(c) & \xi(d) \\ & \\ \xi(c) & \xi(d) \end{pmatrix}$$

soit de rang deux.

c'est à dire que $(\xi(a) \;\; \xi(b))$ et $(\xi(c) \;\; \xi(d))$ soient linéairement indépendantes, ce qui se traduit par $\xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$

23) Supposons que ξ ne soit pas injective, c'est à dire qu'il existe $a \neq d$ tels que $\xi(a) = \xi(d)$.

En prenant $b = c = 1$ on obtient $ad \neq bc$ mais $\xi(a)\xi(d) = \xi(c)\xi(b)$

En prenant la contraposée on en déduit que ξ est injective.

D'autre part ξ est continue, donc ξ est strictement monotone, car ξ est définie sur un intervalle.

24) Supposons qu'il existe un a dans $\mathbb{R}^*$ tel que $\xi(a) = 0$. Alors en prenant $b = a$ $c = 1$ $d = 2$.

on a $ad \neq bc$ mais $\xi(a)\,\xi(d) = \xi(b)\,\xi(c) = 0$.

Par contraposition on a bien $\xi(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^*$.

25) Supposons $\xi(0) \neq 0$ alors ξ ne s'annule pas.

La contraposée du théorème des valeurs intermédiaires implique alors $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*+}$ ou $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*-}$.

Supposons par exemple $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*+}$ (ce qui ne fait pas perdre en généralité, car si ξ vérifie V.1 alors $-\xi$ aussi car $\det(-A) = (-1)^d \det A$).

On a $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et ξ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Supposons par exemple ξ strictement décroissante (la démonstration serait similaire si ξ était croissante).

On aura $\xi(2) > \xi(1) > \xi(0) > 0$

donc $$\frac{\xi(2)\,\xi(0)}{\xi(1)} = \xi(2) \times \frac{\xi(0)}{\xi(1)} < \xi(2)$$

$$\frac{\xi(2)\,\xi(0)}{\xi(1)} = \xi(0) \times \frac{\xi(2)}{\xi(1)} > \xi(0)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc α dans $]0,2[$ tel que $\xi(\alpha) = \dfrac{\xi(0)\,\xi(2)}{\xi(1)}$

donc $\xi(\alpha)\,\xi(1) = \xi(0)\,\xi(2)$

donc $\alpha \times 1 = 0 \times 2$ ce qui est faux.

Par contraposition on a donc $\xi(0) = 0$.

27) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy \in I$ $x^2 \in I$ $y^2 \in I$.

or a $(xy)(xy) = x^2 y^2$ donc

$$\xi(\eta(xy))\,\xi(\eta(xy)) = \xi(\eta(x^2))\,\xi(\eta(y^2))$$

donc $$\eta(xy)\,\eta(xy) = \eta(x^2)\,\eta(y^2)$$

$$(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\,\eta(y^2)$$

Rq. On a utilisé plusieurs fois la contraposée du résultat de la question 22) sans l'énoncer clairement.

Si ξ vérifie V.1 on a.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \xi(a)\,\xi(d) = \xi(b)\,\xi(c) \Rightarrow ad = bc$.

28) On se place dans l'hypothèse $\eta(I \cap]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}^{*+}$

η est continue strictement monotone, et même croissante

car $\eta(I \cap]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \xi(\mathbb{R}^{*+}) \subset I \cap]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^{*+}$

$\Rightarrow$ ξ strictement croissante
(car ξ est strictement croissante ou strictement décroissante et $\xi(0)=0$)

$\Rightarrow$ η strictement croissante.

$$\eta(I \cap]0,+\infty[) = \mathbb{R}^{*+}.$$

$$\underline{I \cap]0,+\infty[=]0, M_1[} = \exp(]-\infty, \underbrace{\ln M_1}_{=M}[)$$

Soit $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ définie sur $]-\infty, M[$.

$\forall (z,t) \in]-\infty, \frac{M}{2}[$

$$2f(z+t) = 2\ln(\eta(e^z e^t)) = \ln((\eta(e^z e^t))^2)$$
$$= \ln(\eta(e^{2z})\,\eta(e^{2t}))$$
$$= \ln(\eta(e^{2z})) + \ln \eta(e^{2t})$$

$$\underline{2f(z+t) = f(2z) + f(2t)}$$

f vérifie donc bien IV.1 sur $]-\infty, M[$.

29) Il existe donc deux constantes α et β telles que $\underline{\forall x \in]-\infty, M[. \quad f(x) = \alpha x + \beta.}$

Soit $\forall x \in]-\infty, M[\quad \eta(e^x) = e^{\alpha x + \beta} = e^\beta e^{\alpha x}.$

Or $\lim\limits_{X \to 0} \eta(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \eta(e^x) = 0$ donc $\alpha > 0$

et $\forall x \in]-\infty, M[\quad \eta(e^x) = \underline{e^\beta (e^x)^\alpha = K_1 (e^x)^{\alpha_1}}$

$\underline{\forall X \in I \cap]0,+\infty[\quad \eta(X) = K_1 (X)^{\alpha_1}.}$

30) En considérant la fonction $f_1 = \widetilde{\ln} \circ \eta \circ (-\exp)$
avec $\widetilde{\ln}(x) = \ln(-x)$, on démontrerait de même l'existence de K_2 et α_2 tels que ($K_2 < 0$ $\alpha_2 > 0$)

$$\eta(x) = K_2 (-x)^{\alpha_2} \quad \text{si } x \in]-\infty, 0[\cap I.$$

31) Ecrivons $\xi(\mathbb{R}) = I =]M_2, M_1[$; on a

$\lim\limits_{x \to M_1} \eta(x) = +\infty$ or $\forall x \in]0, M_1[$ $\eta(x) = K_1 x^{\alpha_1}$.

Donc $M_1 = +\infty$; pour la même raison $M_2 = -\infty$

η est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\eta(0) = 0$.
donc η prend des valeurs strictement négative sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement positives sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{*}$

$$(\eta(-x))^2 = \eta(x^2)\,\eta((-1)^2) = \eta(x^2)\,\eta(1^2) = (\eta(x))^2$$

avec $\eta(-x) \leq 0$ $\eta(x) \geq 0$ donc $\eta(-x) = -\eta(x)$.

η est bien impaire. et par conséquent $\alpha_2 = \alpha_1$, $K_2 = -K_1$

32) Si η prend des valeurs strictement négative sur $I \cap]0, +\infty[$, il suffit de remplacer ξ par $-\xi = \xi_1$. la fonction η associée est $\eta : x \mapsto \eta_1(-x)$
c'est-à-dire $-\eta_1$ car η_1 est impaire. le résultat est démontré.

On pourrait aussi se contenter de dire qu'il suffit de faire des raisonnements similaires.

33) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \lambda \end{pmatrix}$ $\det A_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \lambda \end{vmatrix}$

On effectue les transformations suivantes sur A_λ qui ne changent pas la valeur de $\det A_\lambda$:

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_d$ puis

$L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i croissant de 2 à d.

On obtient une matrice triangulaire supérieure et le résultat (très classique) $\underline{\det A_\lambda = (\lambda + (d-1))(\lambda-1)^{d-1}}$.

34) La même technique donne $\det f_\xi(A_\lambda) = (\xi(\lambda) + (d-1)\xi(1))(\xi(\lambda) - \xi(1))^{d-1}$

On a donc $(\lambda + d - 1) \neq 0$ et $\lambda \neq 1 \Rightarrow \xi(\lambda) + (d-1)\xi(1) \neq 0$ et $\xi(\lambda) \neq \xi(1)$

Supposons $\xi(\mathbb{R}^{*+}) \subset \mathbb{R}^{*+}$ par exemple. (Hypothèse en fait inutile)

Soit x dans $\mathbb{R}^{*-}$, on a $\lambda \neq 1$ et surtout $\xi(\lambda) < 0 < \xi(1)$.

Donc la condition précédente devient

$$\lambda \neq (1-d) \Rightarrow \xi(\lambda) \neq (1-d)\,\xi(1)$$

$$\lambda \neq (1-d) \Rightarrow -C(-\lambda)^\beta \neq (1-d) \times C$$

$$\Rightarrow (-\lambda)^\beta \neq d-1$$

$$-\lambda \neq (d-1) \Rightarrow (-\lambda)^\beta \neq d-1$$

Or si $\beta \neq 1$ en prenant $-\lambda = (d-1)^{\frac{1}{\beta}}$ on a

si $d \geqslant 2$ $\quad -\lambda \neq d-1$ et $(-\lambda)^\beta = d-1$.

On doit donc avoir si $d \geqslant 2$ $\quad \beta = 1$ et $\xi(x) = Kx$.

~~Le cas $\xi(\mathbb{R}^{*+}) \subset \mathbb{R}^{*-}$ se traite de même~~.

Réciproquement si $\xi(x) = Cx$ $C \neq 0$ et $d \geqslant 2$ $\det(f_\xi(A)) = C^d \det A$

donc A inversible $\Rightarrow f_\xi(A)$ inversible.

Si $d = 2$ et $\xi(x) = C_1 x^\beta$ $\quad ad \neq bc \Rightarrow C_1^2 a^\beta d^\beta \neq C_1^2 c^\beta d^\beta$, donc

A inversible $\Rightarrow f_\xi(A)$ inversible.