Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Étude d'un exemple.

1. Vérification immédiate par un calcul direct ou invocation du théorème de Cayley-Hamilton car $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = \chi_A(X)$. $\square$

2. $\mathbb{A}$ est par définition le sous-espace engendré par les matrices I_2 et A. Il est de dimension 2 puisque comme A n'est pas scalaire, la famille (I_2, A) est libre. En outre $\mathbb{A}$ est stable par multiplication d'après la question précédente et contient I_2. Ainsi $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\square$

3. Si $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ vérifie $B^2 = -I_2$ alors B annule le polynôme $X^2 + 1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$. Or si λ est valeur propre de A alors $a + b\lambda$ est valeur prppre de B ce qui prouve que les valeurs propres de A sont non réelles et donc $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

Réciproquement si cette condition est satisfaite alors les valeurs propres de A sont complexes conjuguées $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$. Donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable en la matrice $A' = \mathrm{Diag}(\lambda, \overline{\lambda})$ et ainsi $B = aI_2 + bA$ est semblable à la matrice $B' = \mathrm{diag}(\mu, \overline{\mu})$ avec $\mu = (a + b\alpha) + ib\beta$.
Or $B^2 = -I_2$ si et seulement si $B'^2 = -I_2$ donc si et seulement si $\mu = \pm i$ soit si et seulement si $b = \pm\dfrac{1}{\beta}$ et $a = -\alpha b$.
Ainsi il existe 2 matrices (opposées) de $\mathbb{A}$ de carré $-I_2$.

En conclusion il existe une matrice B de $\mathbb{A}$ de carré $-I_2$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$ et il existe alors exactement deux solutions (bien sûr opposées). $\square$

4. Une matrice réelle scalaire ne pouvant être de carré $-I_2$, la famille (I_2, B) est libre et donc une base de $\mathbb{A}$ (qui est on le sait de dimension 2).
Ainsi toute matrice M de $\mathbb{A}$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = \alpha I_2 + \beta B$ et on peut définir l'application φ de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{C}$ qui à M associe $\alpha + i\beta$. Cette application est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels. En outre $\varphi(I_2) = 1$ et :

$$\begin{aligned}\varphi\big(M_1M_2\big) &= \varphi\big((\alpha_1 I_2 + \beta_1 B)((\alpha_2 I_2 + \beta_2 B)\big) = \varphi\big(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)I + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)B\big)\\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \varphi(M_1)\varphi(M_2).\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que φ est un isomorphisme d'algèbre. $\square$

5. Si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$ alors la matrice A admet une valeur propre réelle λ de multiplicité 2. Comme A n'est pas scalaire, A n'est pas diagonalisable car sinon elle serait alors semblable donc égale a λI_2.
Ainsi A est trigonalisable en une matrice $A' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.
Donc $B = aI_2 + bA$ est semblable à $B' = \begin{pmatrix} a + b\lambda & b\mu \\ 0 & a + b\lambda \end{pmatrix}$. Or $B^2 = 0$ si et seulement si $B'^2 = 0$ soit si et seulement si $a + b\lambda = 0$ (en effet cette condition est évidemment nécessaire et elle est suffisante puisque toute matrice $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de carré nul).
Lorsque $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$ et que A est non scalaire, les matrices de $\mathbb{A}$ de carré nul sont les matrices $aI_2 + bA$ avec $a + \lambda b = 0$ où λ est l'unique valeur propre de A. Les solutions forment donc une droite vectorielle. $\square$

Ainsi dans ce cas $\mathbb{A}$ n'est pas intègre donc n'est pas un corps. $\square$

6. Si A et B sont deux matrices non scalaires quelconques, alors (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$ et (I_2, B) une base de $\mathcal{B}$ de sorte que l'application φ de $\mathbb{A}$ dans $\mathcal{B}$ définie par $\varphi(AI_2 + bA) = aI_2 + bB$ est un isomorphisme d'espace vectoriel tel que $\varphi(I_2) = I_2$.
Si en outre B est semblable à A i.e. si $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ alors on peut aussi écrire $\varphi(M) = P^{-1}MP$ d'où il découle immédiatement que $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$ pour tout couple $(M, N) \in \mathbb{A}^2$.
Ce qui prouve que φ est alors un isomorphisme d'algèbres. $\square$

7. Si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$ alors A admet 2 valeurs propres réelles distinctes donc est $\mathbb{R}$-diagonalisable en la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. D'après la question précédente les algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{D}$ sont isomorphes. Or $\mathbb{D}$ est l'ensemble des matrices $\mathrm{Diag}(a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b)$ donc n'est autre que l'ensemble des marices diagonales. En effet pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il existe deux réels a et b tels que $\begin{cases} a + \lambda_1 b = \alpha \\ a + \lambda_2 b = \beta \end{cases}$ puisque ce système de déterminant $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ est de Cramer.
On peut aussi dire que $\mathbb{D}$ est inclus dans l'algèbre des matrices diagonales donc égal puisque les deux algèbres ont même dimension 2.
Ainsi si $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$ alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. $\square$

Ce n'est pas un corps puisque par exemple la matrice $\mathrm{Diag}(0, 1)$ n'est pas inversible. $\square$

Quelques résultats généraux.

1. Comme $\mathbb{D}$ est une algèbre, l'application ϕ de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ définie par $\phi(x,y)=xy$ est bilinéaire d'où le résultat. $\square$

2. De même comme ϕ est bilinéaire, il vient que l'application ζ de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ définie par $\zeta(a)=\Phi_a$ est linéaire. En outre ζ est injectif car si $a\in\operatorname{Ker}\zeta$ alors ϕ_a est l'application nulle et $a=0$ puisque en particulier $\phi_a(1)=a.1=a=0$.
En outre ζ est un morphisme d'algèbre car $\zeta(1)=x\longmapsto 1.x=x$ i.e. $\zeta(1)=Id_{\mathbb{D}}$ et, pour tout x de $\mathbb{D}$:
$\zeta(ab)(x)=(ab)x=a(bx)=\zeta(a)(bx)=\zeta(a)\big(\zeta(b)(x)\big)=\big(\zeta(a)o\zeta(b)\big)(x)$ et ainsi $\zeta(ab)=\zeta(a)o\zeta(b)$.
Donc ζ est un morphisme injectif d'algèbres.
Il en découle naturellement que ψ est un morphisme injectif d'algèbre donc un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{D}$ sur $\operatorname{Im}(\psi)=\psi(\mathbb{D})$ qui est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathbb{D}$. $\square$

3. Ici $\phi_z(1)=a+ib$ et $\phi_z(i)=-b+ia$ donc $M_{\mathcal{B}}(\phi_z)=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$. $\square$

REMARQUE : C'est une matrice de similitude directe comme prévisible.

4. a. Supposons que $\mathbb{A}$ contienne une matrice A non scalaire avec une valeur propre λ réelle. Comme $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $I_n\in\mathbb{A}$. Donc $B=A-\lambda I_2\in\mathbb{A}$. Comme A n'est pas scalaire, B est non nulle et par ailleurs B admet 0 comme valeur propre donc n'est pas inversible. Ce qui prouve que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps. $\square$

4. b. Dans ce cas $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire admettant une valeur propre réelle donc $\mathbb{A}$ n'est pas un corps. $\square$

4. c.Supposons que $\mathbb{A}$ soit intègre. Alors l'application ϕ_A qui est (on le sait d'après la question 1) un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$ est en outre injective lorsque $A\neq 0$ par définition de la régularité. Elle est donc bijective puisque $\mathbb{A}$ est de dimension finie. En particulier il existe $A'\in\mathbb{A}$ telle que $\phi_A(A')=I_n$ i.e. $AA'=I_n$ ce qui prouve que A est inversible dans $\mathbb{A}$.
Ainsi si l'algèbre $\mathbb{A}$ de dimension finie est intègre alors c'est un corps. $\square$

L'algèbre des quaternions.

1. S'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I_n$ alors A annule le polynôme X^2+1 donc les valeurs propres de A sont toutes égales à $\pm i$. En particulier A n'admet aucune valeur propre réelle et donc n est pair (sinon le polynôme caractéristique de degré impair admettrait au moins une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires). $\square$
On peut aussi remarquer que $\det(A^2)=\det(A)^2=(-1)^n$ ce qui prouve que n est pair. $\square$

2. Pour montrer que $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre, comme $\mathbb{H}$ contient I_n, il suffit de prouver que $\mathbb{H}$ est stable par produit.
Pour cela il suffit de prouver que A^2, A^2B, BA, B^2, BAB; ABA, AB^2 et AB^2A appartiennent à $\mathbb{H}$.
Ce qui résulte facilement des conditions $(*)$. Par exemple $ABA=(AB)A=-(BA)A=-BA^2=B$.
$\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\square$

3. Un calcul facile prouve que $(tI_n+xA+yB+zAB)(tI_n-xA-yB-zAB)=(t^2+x^2+y^2+z^2)I_n$. $\square$

4. a. Soit $(t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4$ tel que $tI_n+xA+yB+zAB=0$. En effectuant le produit par $tI_n-xA-yB-zAB$ la question précédente prouve que $t=x=y=z=0$. Ainsi $\mathbb{H}$ est une algèbre de dimension 4 de base (I_n,A,B,AB). $\square$

4. b. Soit $M=tI_n+xA+yB+zAB$ non nulle. La question 3 prouve que M est inevresible dans $\mathbb{H}$ d'inverse $\dfrac{1}{t^2+x^2+y^2+z^2}(tI_n-xA-yB-zAB)$. Donc $\mathbb{H}$ est un corps. $\square$

5. a. Vérification immédiate par calcul par blocs en remarquant que $J^2=-I_2$. $\square$

5. b. Comme les matrices A, B et donc $C=AB$ sont antisymétriques on a lorsque $M=tI_n+xA+yB+zAB\neq 0$ que ${}^tM=tI_n-xA-yB-zAB\in\mathbb{H}$. Donc $M\,{}^tM=(t^2+x^2+y^2+z^2)I_4$ ce qui prouve que $\det(M)^2=(t^2+x^2+y^2+z^2)^4$ et $M^{-1}=\dfrac{1}{(t^2+x^2+y^2+z^2)}{}^tM=\dfrac{1}{\sqrt{|\det(M)|}}{}^tM\in\mathbb{H}$. $\square$

Les automorphismes de l'algèbre des quaternions.

1. D'après le début de la question 5 ci-dessus, il est immédiat que $\mathbb{L}=\operatorname{vect}(A,B,C)$. $\square$
Ce n'est pas une sous-algèbre puisque par exemple $A\in\mathbb{L}$ et $A^2=-I_4\notin\mathbb{L}$. $\square$

2. En écrivant $M=xA+yB+zC$ et $N=x'A+y'B+z'C$ il vient par un calcul facile (comme celui de la question 3 de la partie précédente) que $MN+NM=-2(xx'+yy'+zz')I_4$ donc $\dfrac{1}{2}(MN+NM)=-(M|N)I_4$. $\square$

3. • D'après la question précédente (avec $N = M$) si $M \in \mathbb{L}$ alors $M^2 = -||M||^2 I_4 = \lambda I_4$ avec $\lambda \leqslant 0$.
• Réciproquement soit $M = tI_4 + xA + yB + zC$ tel que $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \leqslant 0$.
Le calcul fournit, car on vérifie facilement que $AC + CA = BC + CB = 0$ comme $AB + BA$:
$M^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)I_4 + 2txA + 2tyB + 2tzC$.
On en déduit que $tx = ty = tz = 0$ puisque M^2 est une matrice scalaire et que (I, A, B, C) est libre.
Donc $t = 0$ car sinon $x = y = z = 0$ et $M^2 = t^2 I_4 = \lambda I_4$ avec $\lambda > 0$.
• En conclusion un quaternion M est pur si et seulement si $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \leqslant 0$. $\square$

4. Soit ϕ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ et soit $M \in \mathbb{L}$. Alors $\phi(M)\phi(M) = MM$ ce qui prouve que $\phi(M) \in \mathbb{L}$ d'après la question précédente donc que ϕ induit un endomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{L}$.
En outre d'après la question 2 on a (puisque $\phi(M) \in \mathbb{L}$) : $\|\phi(M)\|^2 = -\phi(M)\phi(M) = -MM = \|M\|^2$.
Ainsi si ϕ est un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ alors $\mathbb{L}$ est stable par ϕ et la restriction de ϕ à $\mathbb{L}$ est un automorphisme orthogonal de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{L}$. $\square$

5. a. Soient M et N deux quaternions purs de même norme et colinéaires. On a alors évidemment $M = N$ ou $M = -N$. Dans le premier cas on a $M = P^{-1}NP$ avec $P = I_4 \in \mathbb{H}$.
Dans le second cas trouver P non nulle de $\mathbb{H}$ (donc inversible puisque $\mathbb{H}$ est un corps) telle que $M = -P^{-1}MP$ revient à trouver P non nulle de $\mathbb{H}$ telle que $PM + MP = 0$. Il suffit d'après la question 2 de choisir un élément non nul de l'orthogonal dans $\mathbb{L}$ de vect(M) qui existe bien puisque cet orthogonal est de dimension 2. $\square$

5. b. Soient désormais M et N deux quaternions purs de même norme mais non colinéaires. D'après la question 2, on a $M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = -\|M\|^2 N + \|N\|^2 M = \|M\|^2(M - N)$. $\square$

Ainsi $M\big(MN - \|M\|^2 I_4\big) = \big(MN - \|M\|^2 I_4\big)N$. Pour montrer que $P = MN - \|M\|^2 I_4$, qui est bien un élément de $\mathbb{H}$, convient, il suffit de montrer que P est inversible c'est à dire non nulle puisque $\mathbb{H}$ est un corps.
Or $P = MN - M^2$ d'après la question 2 et ainsi $P = M(N - M)$. Or comme la famille (M, N) est libre par hypothèse les éléments M et $M - N$ sont non nuls donc P également puisque $\mathbb{H}$ est un corps donc est intègre.
En conclusion dans la matrice $P = M(N - M)$ convient. $\square$

6. Résultat faux en général : si M et N sont deux quaternions purs de même norme non opposés alors $P = M + N$ est un élément non nul de H qui vérifie $PM = NP$ car $(M + N)M = \|M\|^2 I_4 + NM = \|N\|^2 I_4 + NM = N(M + N)$ et ici $Q = M + N$ (puisque $M + N \in \mathbb{L}$) et $m + N$ n'est pas en général orthogonale à M.
Par contre il est vrai (vérification immédiate) avec chacune des matrices des 3 cas particuliers étudiés précédemment. $\square$

7. Commençons par remarquer que pour tout élément P non nul (donc inversible) de $\mathbb{H}$, l'application ϕ_P de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ définie par $\phi_P(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'algèbre : elle est évidemment linéaire, respecte la multiplication, fixe l'identité et est bijective.
Notons aussi qu'un morphisme ϕ d'algèbre de $\mathbb{H}$ est entièrement déterminé par les images de A et B car $\phi(M) = \phi(tI_4 + xA + yB + zC) = tI_4 + x\phi(A) + y\phi(B) + z\phi(A)\phi(B)$.
Notons enfin que les éléments A, B et C sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{L}$ en vertu de la question 2 et d'une remarque de la question 3 : $AB + BA = AC + CA = BC + CB = 0$.

• Soit désormais ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ qui fixe A.Alors $\phi_P = \phi$ si et seulement si $\begin{cases} P^{-1}AP = A & (1) \\ P^{-1}BP = B' & (2) \end{cases}$ en notant $\mathcal{B}' = \phi(B)$.
Or d'après la question 4, B' est un quaternion pur de norme 1 et orthogonal à A puisque $(A|B) = 0$. Donc $B' = \cos\theta B + \sin\theta C$.
Pour trouver P vérifiant (2) la question 6 nous incite à chercher P de la forme $\alpha I_4 + Q$ avec Q orthogonale à B et à B' donc à B et à C donc de la forme βA c'est à dire à chercher P de la forme $\alpha I_4 + \beta A$.
Or toute matrice $\alpha I_4 + \beta A$ commute avec A donc vérifie (1) si elle est non nulle i.e. si $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.
Ainsi la question revient à prouver qu'il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $(\alpha I_4 + \beta A)(\cos\theta B + \sin\theta C) = B(\alpha I_4 + \beta A)$ soit $(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)B + (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)C = \alpha B - \beta C$ soit :
$\begin{cases} (1 - \cos\theta)\alpha + \sin\theta\beta = 0 \\ \sin\theta\alpha + (1 + \cos\theta)\beta = 0 \end{cases}$.
Or ce système est de déterminant nul donc n'est pas de Cramer donc admet une (en fait une infinité) solution non nulle. $\square$

• Plaçons nous désormais dans le cas général où A n'est pas invariante par ϕ. D'après la question 5 il existe $Q \in \mathbb{H}$ telle que $Q^{-1}A'Q = A$ puisque A et A' sont deux quaternions purs de même norme (question 4). Alors $\phi_Q o \phi$ est un isomorphise d'algèbre fixant A donc de la forme ϕ_R d'après l'étude du cas précédent. Alors $\phi = \phi_P$ avec $P = RQ^{-1}$. $\square$

FIN