Polytechnique MP 2016 Mathématiques B

Première partie

1 a) $\forall \omega \in \Omega$ $(S_k(\omega))_{k\geq 0}$ est croissante car les X_k sont à valeurs positives. Donc $S_k(\omega) \in [0,\ell] \iff \forall i \leq k \;\; S_i(\omega) \in [0,\ell]$

Donc $\operatorname{card}\{k\in\mathbb{N} \mid S_k(\omega)\in[0,\ell]\} = \max\{k\in\mathbb{N} \mid S_k(\omega)\leq \ell\} + 1$

(car $S_k(\omega)\in[0,\ell] \iff S_k(\omega)\leq \ell$ car $S_k(\omega)\in\mathbb{R}^+$).

Donc $\quad N(0,\ell)(\omega) = n+1 \iff n = \max\{k\in\mathbb{N} \mid S_k(\omega)\leq \ell\}$

$\quad N(0,\ell)(\omega) = n+1 \iff S_n(\omega)\leq \ell < S_{n+1}(\omega)$

$$S_n \leq \ell = \bigcup_{p\geq n} S_p \leq \ell < S_{p+1} \cup \left(\bigcap_{p\geq 1} S_p \leq \ell\right)$$

car $\quad S_n(\omega)\leq \ell \iff \exists p\geq n \quad S_p(\omega)\leq \ell < S_{p+1}(\omega)$

ou $\forall p \geq n \quad S_p(\omega)\leq \ell$ (qui équivaut à $\forall p\geq 1 \;\; S_p(\omega)\leq \ell$ car $(S_p(\omega))$ est croissante)

Donc $\quad S_n \leq \ell = \bigcup_{p\geq n} N(0,\ell) = p+1 \;\cup\; N(0,\ell) = +\infty)$

$$(S_n \leq \ell) = (N(0,\ell) \geq n+1)$$

De même $\quad (S_n(\omega) \geq \ell) \Rightarrow (S_{n+1}(\omega) > \ell)$ ce qui équivaut à

$\exists p \in [0,n] \quad S_p(\omega) \leq \ell < S_{p+1}(\omega)$ donc

$$(S_n \geq \ell) \subset \bigcup_{p=0}^{n} (S_p \leq \ell < S_{p+1}) = N(0,\ell) \leq n+1$$

Rq Il n'est dit nulle part que N peut prendre la valeur $+\infty$. Est-ce qu'il faut prouver que $N(0,\ell)$ est négligeable ? Cela expliquerait le "à des ensembles négligeables près". ~~[illegible] $E(S_p) = pE(X)$ [illegible] $pE(X)$ [illegible] S_k~~ Or $P(X \geq \frac{E(X)}{2}) = p > 0$ et $\sum_{i\geq 1} P(X_i \geq \frac{E(X)}{2})$ diverge. Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure

(Hors-programme)

1b) les X_i sont indépendantes donc $V(S_n) = nV$
l'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne alors

$$P(|S_n - nm| \geq n\varepsilon) \leq \frac{nV}{n^2\varepsilon^2} = \frac{V}{n\varepsilon^2}$$

Or $(S_n \leq n(m-\varepsilon)) \subset (|S_n - nm| \geq n\varepsilon)$ donc

$$P(S_n \leq n(m-\varepsilon)) \leq \frac{V}{\varepsilon^2 n}$$

2) $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} P(Y=k)$

Posons $u_{n,k} = P(Y=k)$ si $1 \leq n \leq k$ 0 si $n > k$.
Puisque les $u_{n,k}$ sont positifs et que $E(Y)$ est finie on peut permuter les sommations

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y=k)$$

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y \geq n)$$

3a) $\exp(\ell - S_n)$ est positive donc $\exp(\ell - S_n) \geq \exp(\ell - S_n) \mathbb{1}_{\ell - S_n \geq 0}$

Donc $E(\exp(\ell - S_n)) \geq E(\exp(\ell - S_n)\mathbb{1}_{\ell - S_n \geq 0}) \geq E(\mathbb{1}_{\ell - S_n \geq 0})$

$$E(\exp(\ell - S_n)) \geq P(S_n \leq \ell)$$

3b) $P(S_n \leq \ell) \leq E(e^{\ell} \prod_{i=1}^{n} e^{-X_i}) = e^{\ell} E(\prod_{i=1}^{n} e^{-X_i})$

les X_i sont mutuellement indépendantes donc les e^{-X_i} aussi et par conséquent

$$P(S_n \leq \ell) \leq e^{\ell} \prod_{i=1}^{n} E(e^{-X_i}) = e^{\ell} (E(\exp(-X)))^n.$$

3b) Or $X>0$ donc $0\leq e^{-X}<1$ donc $0\leq E(e^{-X})<1$

et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} P(S_n\leq \ell)=0$. Donc $N(0,\ell)$ est une variable aléatoire à valeurs presque sûrement dans $\mathbb{N}$ (On retrouve le résultat de la remarque de la question 1.a)

On a donc
$$E(N(0,\ell)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N(0,\ell)\geq k)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(0,\ell)\geq n+1)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n\leq \ell)$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\ell}(E(\exp(-X)))^n$$
$$\underline{E(N(0,\ell)) \leq \frac{e^{\ell}}{1-E(\exp(-X))}}$$

3c) $(S_{n-1}<x\leq S_n, N(x,x+\ell)\geq k) = (S_{n-1}<x\leq S_n, X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}\leq x+\ell-S_n)$

$$\subset (S_{n-1}<x\leq S_n, X_{n+1}+\cdots+X_{n+k-1}\leq \ell)$$

Donc
$$P(S_{n-1}<x\leq S_n, N(x,x+\ell)\geq k)\leq P(S_{n-1}<x\leq S_n, X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}\leq \ell)$$

Or les X_i sont mutuellement indépendantes, donc $X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}$ est indépendantes des (S_{n-1}, S_n) donc l'événement $S_{n-1}<x\leq S_n$ est indépendant de $X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}\leq \ell$. Par conséquent :

$$P(S_{n-1}<x\leq S_n, N(x,x+\ell)\geq k)\leq P(S_{n-1}<x\leq S_n)P(X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}\leq \ell)$$

Or les X_i sont de même loi donc $P(X_{n+1}+ \quad +X_{n+k-1}\leq \ell)=P(S_{k-1}\leq \ell)$ et on a bien

$$P(S_{n-1}<x\leq S_n, N(x,x+\ell)\geq k)\leq P(S_{n-1}<x\leq S_n)\, P(N(0,\ell)\geq k)$$

Or $((S_{n-1}<x\leq S_n))_{n\geq 1}$ est un système quasi-complet d'événements

En sommant on obtient $P(N(x,x+\ell)\geq k)\leq P(N(0,\ell)\geq k)$ puis d'après la question 2 $\underline{E(N(x,x+\ell))\leq E(N(0,\ell))\leq \frac{e^{\ell}}{1-E(\exp(-X))}}$

Deuxième partie.

4a) g est positive donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $E(g(x-S_k)) \geq 0$

donc $f_{r+1}(x) - f_r(x) = E(g(x-S_{r+1})) \geq 0$ pour tout x et $(f_r(x))_{r\geq 0}$ est croissante

4b) le théorème de sommation par paquets pour une famille de réels positifs permet d'obtenir que si $\sum_{r=0}^{+\infty} f_r$ est une somme de variables aléatoires positives telles que $\sum_{r=0}^{+\infty} E(f_r) < +\infty$ alors $E\left(\sum_{r=0}^{+\infty} f_r\right) = \sum_{r=0}^{+\infty} E(f_r)$.

le théorème étendu (qui n'est pas officiellement au programme) montre que ce résultat reste vrai même si $\sum_{r=0}^{+\infty} E(f_r) = +\infty$.

On a donc $f(x) = E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g(x-S_k)\right) = E(N(x-K,x))$.

4c) $0 \leq g \leq \|g\|_\infty \mathbb{1}_{[0,K]} = k.\tilde{g}$

Donc $\forall x$ $0 \leq f_r(x) \leq \tilde{f}_r(x) \leq \tilde{f}(x) = E(N(x-K,x)) \leq \dfrac{e^K}{1-E(\exp(-X))}$

($\tilde{f}_r$ et $\tilde{f}$ sont associées à $\tilde{g}$ comme f_r et f à g).

4.d) la question précédente montre que $(f_r(x))_{r\geq 0}$ est majorée. Comme elle est croissante elle est convergente.

De plus $\forall x$ $0 \leq f(x) \leq \|g\|_\infty \dfrac{e^K}{1-E(\exp(-X))}$ Donc

f est bornée

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}^-$ $\forall \omega \in \Omega$ $\forall k$ $g(x-S_k(\omega)) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^-$ $f(x) = 0$.

5) φ est bornée donc $\varphi(X,Y)$ admet une espérance finie. (5)

Soit $(y_j)_{j\geq 0}$ l'ensemble des valeurs de Y (quitte à le compléter en attribuant des probabilités nulles, on peut supposer qu'il est dénombrable)

Alors la famille $\varphi(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$ est sommable (ce qui justifie les regroupements qui suivent) et

$$E(\varphi(X,Y)) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \varphi(x_i, y_j)\, P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \varphi(x_i, y_j)\, P(X = x_i)\, P(Y = y_j) \quad (X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes})$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(x_i, y_j) P(Y = y_j)$$

$$E(\varphi(X,Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, E(\varphi(x_i, Y))$$

6a) $$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} E(g(x - S_k))$$

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} E(g(x - S'_k - X_1)) \qquad S'_k = \sum_{j=2}^{n+1} X_j$$

Puisque g est bornée et que X_1 est indépendante de X'_k, pour tout k on peut appliquer le résultat de la question précédente.

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, E(g(x - S'_k - x_i))$$

$$= g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \sum_{k=1}^{n+1} E(g(x - x_i - S'_k))$$

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, f_n(x - x_i)$$ car $(X_2, , X_{n+1})$ a même loi que $(X_1, , X_n)$

6b) On peut permuter la sommation et le passage à la limite car si $u_i(n) = p_i f(x - x_i)$ on a $|u_i(n)| \le p_i \|f\|_\infty$ et $\sum_{i \geq 0} p_i \|f\|_\infty$ converge. Donc $\sum_{i \geq 0} u_i$ converge normalement et par conséquent uniformément sur $\mathbb{N}$. On en déduit bien

$$\underline{f(x) = g(x)} + \underline{\sum_{i=0}^{+\infty} p_i f(x - x_i)}$$

7.a) On applique le résultat de la question 5 pour établir le résultat $h(x) = E(h(x - S_n))$ par récurrence.

Pour $n = 0$ $S_0 = 0$ on a bien $h(x) = E(h(x - S_0))$.

On suppose le résultat vrai à l'ordre n

$$h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i E(h(x - x_i - S_n))$$

$$\underline{h(x) = E(h(x - X_{n+1} - S_n)) = E(h(x - S_{n+1}))}$$

(On a utilisé l'indépendance de S_n et X_{n+1} et le fait que h est bornée)

7b) $\underline{h(x) = E(h(x - S_n)) \le P(x \geq S_n) \|h\|_\infty + P(S_n > x) \times 0}$

Or $\lim_{n \to +\infty} P(x \geq S_n) = 0$ donc $h(x) = 0$.

7c) Par soustraction si f_1 et f_2 sont bornées, à support dans $\mathbb{R}^+$ et vérifient h alors

$h = f_1 - f_2$ est bornée, à support dans $\mathbb{R}^+$

et vérifie. $\forall x \quad h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h(x - x_i)$

donc $h = 0$ $\underline{\text{et } f_1 = f_2}$.

8a) Cet ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble

$S = \bigcup S_n(\Omega)$ déjà utilisé (réunion d'ensemble dénombrable donc dénombrable). Il est inclus dans $\mathbb{R}^+$, car $\forall \omega\ \forall k\ S_k(\omega) \geq 0$.

(il existe au moins un x_i tel que $p_i > 0$, donc Λ_X contient au moins $\mathbb{N}^* x_i$, donc Λ_X est effectivement dénombrable)

8b) On a déjà utilisé cette formule (c'est la formule de transfert)

8c) le fait que $(f_r(x))_{r \geq 0}$ soit bornée montre que la famille $(P(S_k = y_i)\, g(x-y_i))_{k,i}$ est sommable.

(car c'est une famille de réels positifs)

Une sommation par paquets donne immédiatement

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = y_i)\right)}_{q_i} g(x-y_i)$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N},\ y_i \in [x-K, x]} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = y_i)\right) = E(N(x-K, x))$$

(démontré antérieurement)
(en 4b).

9a) Si $x \in [-A, A]$ $g(x-y_i) = 0$ sauf peut-être si $y_i \in [-A-K, A]$, auquel cas $|q_i\, g(x-y_i)| \leq q_i \|g\|_\infty$

On recouvre $[-A-K, A]$ par un nombre fini d'intervalles de longueur K, disons N. On a alors

$$\sum_{i \in [-A-K, A]} q_i \leq N \cdot \cancel{E(N(\ldots}\ \frac{e^K}{1 - E(\exp(-X))} < +\infty$$

ceci établit bien la convergence normale de la série.

9b) Si g est continue chaque $x \mapsto g(x-y_i)$ est continue. La convergence étant normale donc uniforme sur tout segment, il en résulte que f est continue

. la continuité uniforme se prouve par un raisonnement similaire au précédent.

Soit x, x' avec $|x-x'| \leq k$

$$|f(x)-f(x')| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} q_i \, |g(x-y_i) - g(x'-y_i)|$$

$$\leq \Big(\sum_{\substack{i=0 \\ y_i \in [x-k-K, x+k]}}^{+\infty} q_i \Big) \sup_i |g(x-y_i) - g(x'-y_i)|$$

$$|f(x)-f(x')| \leq 3 \frac{e^K}{1-E(\exp(-X))} \sup_i |g(x-y_i)-g(x'-y_i)|$$

la continuité uniforme de f résulte immédiatement de celle de g (g est uniformément continue car continue et à support compact)

9c) g' est continue et à support compact donc g' est bornée. Les même arguments que précédemment montrent la convergence uniforme de $\sum_{i \geq 0} q_i \, g'(x-y_i)$ sur tout segment donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} q_i \, g'(x-y_i).$$

Pour calculer $\lim_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ on peut supposer que x' ne varie que dans $[x - K, x + K]$.

Puisque $\left| \frac{g(x - y_i) - g(x' - y_i)}{x - x'} \right| \leq \| g' \|_\infty$, la même majoration qu'en 9 b) donne $\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \leq 3 \frac{e^K}{1 - E(\exp(-X))} \| g' \|_\infty$,

donc $\underline{|f'(x)| \leq 3 \frac{e^K}{1 - E(\exp(-X))} \| g' \|_\infty}$.

Maintenant que l'on sait que f' est bornée il est facile de prouver que $\sum_{i \geq 0} p_i f'(x - x_i)$ converge normalement donc uniformément, ce qui nous donne par dérivation terme à terme

$$\underline{f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(x - x_i)}$$

Troisième partie

10a) On prouve par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^*$ que pour tout x de Λ nx est dans Λ.

On en déduit $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \ \forall (x,y) \in \Lambda^2 \ nx + my \in \Lambda$

Soit $(x,y) \in \Lambda^2$ et $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ $0 \leq k \leq n$.

$$nx + k(y-x) = (n-k)x + ky$$

Si $k=0$ $\quad nx + k(y-x) = nx \in \Lambda$

Si $k=n$ $\quad$ " $= ny \in \Lambda$

Si $0<k<n$ $\quad$ " $= \underset{>0}{(n-k)}x + \underset{>0}{k}y \in \Lambda$.

10b) $r(\mathbb{N}^*) = 1$ $\quad r(\mathbb{Q}^{*+}) = 0$ $\quad$ et $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}^{*+}$ sont bien stables par addition

11a) Par caractérisation de la borne inférieure il existe z dans Γ tel que $r(\Lambda) \leq z < 2r(\Lambda)$

On écrit un tel z sous la forme $z = b-a$. $(b,a) \in \Lambda^2$.

(et on l'appelle d)

11b) $na + kd = a + \underbrace{(n-1)a + k(b-a)}_{\in \Lambda \text{ car } 0 \leq k \leq n-1} \in \Lambda$

$na + (k+1)d \in \Lambda$ (car $k+1 \leq n$).

Si $z \in]\underbrace{na+kd}_{x}, \underbrace{na+(k+1)d}_{y}[$ alors

$$z - x \leq \frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad y - z \leq \frac{d}{2}$$

dans les deux cas $0 < z-x < r(\Lambda)$ ou $0 < y-z < r(\Lambda)$

par définition de la borne inférieure, et puisque $x \in \Lambda$, $y \in \Lambda$ on ne peut avoir $z \in \Lambda$. D'où le résultat demandé.

11 c . Puisque $d>0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $n_0 d > a$ ce qui implique $(n_0+1)a < n_0 a + n_0 d$. Si on a choisit n_0 minimal alors $(n_0-1)d \leq a$ et par conséquent $(n_0+1)a \in \Lambda \cap [n_0 a + (n_0-1)d, n_0 a + n_0 d[$, donc $(n_0+1)a = n_0 + (n_0-1)d$ et $a = (n_0-1)d = k_0 d$.

11 d) $\bigcup_{\substack{n \geq n_0 \\ 0 \leq k \leq n_0 - 1 (\leq n)}} [na + kd, na + (k+1)d] = [n_0, +\infty[$.

On en déduit que tout élement de $\Lambda \cap [n_0, +\infty[$ est de la forme $na + kd$ ou $na + (k+1)d$, donc de la forme $k'd$.

Si $b \in \Lambda \cap]0, n_0[$ alors il existe n tel que $b + na \in \Lambda \cap [n_0, +\infty[$, donc $b + na = k'd$ et $b = (k' - n k_0) d \in d\mathbb{Z}$

En conclusion $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$

12a) Il existe N tel que $Nb > N+1\ a$ où b et a sont dans Λ tel que $0 < b - a < \eta$ (caractérisation de la borne inférieure pour l'existence de a et b). Comme en 11 d

$[Na, +\infty[= \bigcup_{n \geq N} [na, nb]$ et $[na, nb] = \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} [na + k(b-a), na + (k+1)(b-a)]$

or $na + k(b-a) \in \Lambda$ ainsi que $na + (k+1)(b-a)$ et

$(na + (k+1)(b-a)) - (na + k(b-a)) < \eta$.

Donc en choisissant $A = Na$ on a $\forall x \geq A\ [x, x+\eta] \cap \Lambda \neq \emptyset$

$(x \geq Na \Rightarrow \exists n, k\ \ x \in [na + k(b-a), na + (k+1)(b-a)]$ et $na + (k+1)(b-a) \in \Lambda \cap [x, x+\eta]$.

12b. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après la question précédente

$$\exists A \quad \forall x \geq A \quad \Lambda \cap [x, x + \frac{\eta}{2}] \neq \emptyset$$

Or il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_0 \quad n \frac{\eta}{2} \geq A$, fixons un tel N_0

$\forall n \geq N_0 \quad \exists x_n \in \Lambda \cap [(N_0 + n) \frac{\eta}{2}, (N_0 + n + 1) \frac{\eta}{2}]$.

On $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\forall n \; x_n \in \Lambda$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$

Donc $\exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x \geq (N_0 + N_1) \frac{\eta}{2} \quad \exists n_x \geq N_1 \quad |x - x_{n_x}| \leq \frac{\eta}{2} < \eta$

$\forall x \geq (N_0 + N_1) \frac{\eta}{2} \quad |f(x)| \leq |f(x) - f(x_{n_x})| + |f(x_{n_x})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \quad \forall x \geq B \quad |f(x)| < \varepsilon$$

ceci veut dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

quatrième partie

13a) De $h(0) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, h(-x_i)$ et $\forall i\ h(-x_i) \leq h(0)$

et $\forall i\ p_i \geq 0$ et $\sum p_i = 1$, on peut déduire.

$\forall i\ p_i > 0\quad h(-x_i) = h(0)$ c'est à dire $h(-\cancel{X}) = h(0)$

presque sûrement.

Ensuite $h(-x_j) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, h(-x_i - x_j)$, donc $h(-(X_1+X_2)) = h(0)$

presque sûrement.

Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\quad h(-S_n) = h(0)$ presque sûrement.

Par conséquent si $\underline{P(S_n = x) > 0 \quad h(-x) = h(0)}$

13b) $x \in \Lambda_X \Leftrightarrow \exists n\quad P(S_n = x) > 0$

$y \in \Lambda_X \Leftrightarrow \exists m\quad P(S_m = y) > 0$

les $(X_i)_{i \geq 0}$ étant équidistribuées $P(S_{n+m} = x+y) > 0$

(car $P(S_{n+m} = x+y) \geq P(X_{n+1} + \cdots X_{n+m} = y \mid S_n = x)\, P(S_n = x)$

$\geq P(X_{n+1} + \cdots + X_{n+m} = y)\, P(S_n = x)$

$\geq P(S_m = y)\, P(S_n = x)$)

Donc Λ_X est stable par addition.

$r(\Lambda_X) = 0$ car. $\forall d\quad P(X \in d\mathbb{Z}) < 1$

$\forall d\quad P(X \notin d\mathbb{Z}) > 0$

donc $\Lambda_X \not\subset d\mathbb{Z}$

($\Lambda_X \supset \{x_i, p_i \neq 0\}$ et $\{x_i, p_i \neq 0\} \not\subset d\mathbb{Z}$)

13c $\forall x \in \Lambda_X \quad \exists n \quad P(S_n = x) > 0$ donc
$\forall x \in \Lambda_X \quad h(-x) = h(0)$

- Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de Λ_X tendant vers $+\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(-x) = h(0)$
- h est uniformément continue
- $\mathcal{R}(\Lambda_X) = 0$

D'après 12b) on peut donc affirmer $\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} h(-x) = h(0)}$

13d) Soit $\varepsilon > 0$ et x dans $\mathbb{R}$, il existe A tel que

$\forall t \geq A \quad h(x-t) \geq h(0) - \varepsilon \quad$ (car $\lim\limits_{t \to +\infty} h(x-t) = h(0)$)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{h(x) = E(h(x - S_n)) \geq \min(h)\, P(S_n < A) + (h(0) - \varepsilon)\, P(S_n \geq A)}$

En faisant tendre n vers $+\infty$: $\quad h(x) \geq h(0) - \varepsilon$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad h(0) - \varepsilon \leq h(x) \leq h(0)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = h(0)$

14a) f' est bornée donc $\varphi : x \mapsto \sup\limits_{t \geq x} f'(t)$ est définie et bornée. φ est décroissante et minorée, elle possède donc une limite.

14b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A > 0 \quad \exists B > A \quad \forall x \geq B \quad C \leq \varphi(x) < C + \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A > 0 \quad \exists B > A \quad \forall x \geq B \quad \forall t \geq x \quad C \leq f'(t) < C + \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A > 0 \quad \exists t > A \quad C \leq f'(t) \leq C + \varepsilon$.

On construit alors la suite (y_n) par récurrence, en choisissant y_0 tel que $\quad C \leq f'(y_0) \leq C + 1$, puis y_{n+1} en prenant $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n} \quad A = y_n + 1 \quad y_{n+1} = t$ t.q $C \leq f'(t) \leq C + \dfrac{1}{2^n}$.

On a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(y_n) = C$.

14 c) On a

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = g'(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i f'(x - x_i)$

$\forall t \ \forall k \quad f'(t+t_k) = g'(t+t_k) + \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \underbrace{f'(t+t_k - x_i)}_{v_i(t_k)}$

$\sum v_i$ converge normalement car f' est bornée. On peut permuter limite et sommation. (la converge uniforme sur tout segment de $(\xi_k)_{k \geq 0}$ implique la convergence simple de cette suite).

ξ vérifie donc

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \, \xi(t - x_i)$$ (car g' est à support compact!

On a vu en 9c) que f' est uniformément continue.

Les ξ_k sont uniformément continue. (et $|x-y| < \eta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ implique par translation $\underline{\underline{\forall k}}$ $\forall x, y \ |x-y| < \eta \Rightarrow |\xi_k(x) - \xi_k(y)| < \varepsilon$)

donc par passage à la limite ξ est uniformément continue.

$\xi(0) = C$ et $\forall t \ \xi(t) \leq C$, puisque pour tout k

$\xi_k(t) = f'(t+t_k) \leq \sup_{x \geq t+t_k} f'(x) = \varphi(t+t_k)$ et

$\lim_{k \to +\infty} \varphi(t+t_k) = C$.

On peut alors appliquer le résultat de 13d) on en déduit que ξ est constante.

14d) $\left| \int_0^x f'(t+t_k)\,dt \right| = |f(x+t_k) - f(t_k)| \leq 2 \|f\|_\infty$

Or comme on a convergence uniforme sur le segment $[0, x]$

On obtient $|C x| \leq 2 \|f\|_\infty$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $C = 0$.

14e) $\forall t \quad \inf_{x \geqslant t} f'(x) \leq f'(t) \leq \sup_{x \geqslant t} f'(x)$.

Par encadrement $\lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0$

14f) $f(t+\ell) - f(t) = \int_t^{t+\ell} f'(u)\,du = \int_0^{\ell} f'(t+u)\,du$.

puisque f' est bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il en résulte $\lim_{t \to +\infty} f(t+\ell) - f(t) = 0$