Concours Commun Centrale-Supélec 2016 PSI Mathématiques II

I) Transformation de Fourier

I A) + φ est continue par morceaux car :

1) $\varphi|_{]-\infty,-\frac{1}{2}[}$, $\varphi|_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}$ et $\varphi_{]\frac{1}{2},+\infty[}$ sont continues

2) $\lim_{-\frac{1}{2}^+}\varphi$, $\lim_{-\frac{1}{2}^-}\varphi$, $\lim_{\frac{1}{2}^+}\varphi$ et $\lim_{\frac{1}{2}^-}\varphi$ existe.

+ φ est intégrable car elle est positive et

$\forall x \leq -\frac{1}{2} \quad \forall y \geq \frac{1}{2} \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$ donc

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = 1$

+ $$\underline{\mathcal{F}(\varphi)(\xi)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi t\xi}\,d\xi = \begin{cases} 1 \text{ si } \xi = 0 \\ \left[-\frac{1}{2i\pi\xi}e^{-2i\pi t\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}} \text{ si } \xi \neq 0 \end{cases}$$

I B.1) $\sin x$ est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Donc

$$\underline{\forall \xi \neq 0 \quad \frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}\xi^{2n}}{(2n+1)!} = \psi(\xi)}$$

Or a aussi $\psi(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n+1)!}0^{2n} = 1$.

Donc $\underline{\psi \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R}}$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) ~~ψ est intégrable~~ $\underline{\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx = \int_n^{n+1}\frac{|\sin\pi x|}{\pi x}\,dx \geq \int_n^{n+1}\frac{|\sin\pi x|}{(n+1)\pi}\,dx}$

Or $|\sin x|$ est π-périodique, donc

$$\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^1(\sin\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

$\int_0^{n\pi}|\psi(x)|\,dx \geq \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Or $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k}$ diverge donc $\int|\psi(x)|\,dx = +\infty$ et $\underline{\psi \text{ n'est pas intégrable}}$.

I C) $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$ sous réserve d'existence.

Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\xi, t) \longmapsto f(t) e^{-2i\pi t \xi} \end{array}$

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad h(\cdot, t)$ est continue.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad h(x, \cdot)$ est continue par morceaux
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad |h(x,t)| \leq |f(t)|$

et $t \mapsto |f(t)|$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

I.D.1) $x \mapsto x^n f(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^{n+2} f(x)$ est bornée car f est dans $\mathcal{S}$.

donc $|f(x)| \underset{\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ avec $2 > 1$

par conséquent f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) En reprenant les notations de I.C.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{\partial^n h}{\partial \xi^n}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\frac{\partial^n h}{\partial \xi^n}(\xi, t) = (-2i\pi)^n t^n f(t) e^{-2i\pi t \xi}$

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^n h}{\partial \xi^n}(\cdot, t)$ est continue.
- $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^n h}{\partial \xi^n}(\xi, \cdot)$ est continue par morceaux
- $\forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad \left| \frac{\partial^n h}{\partial \xi^n}(\xi, t) \right| \leq |t|^n |f(t)|$

et $t \mapsto |t^n| |f(t)|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}$ $\quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi \xi t} dt.$

I.E.1) Θ est continue par morceaux.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, car continue et $\lim_{t \to \pm\infty} t^n e^{-t^2} = 0$.

Donc Θ est dans $\mathcal{S}$.

Soit $h = \mathcal{F}(\theta)$. D'après I.D.2) h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $h'(\xi) = (-2i\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t\xi} dt$

On effectue une intégration par parties

$$\forall \xi \quad h'(\xi) = \underbrace{\left[i e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} i(-2i\pi\xi) e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t\xi} dt \right\}$$

$\forall \xi$. $h'(\xi) = -2\pi\xi\, h(\xi)$.

I.E.2) On en déduit $h(\xi) = c\, e^{-\pi\xi^2}$ avec $c = h(0)$

Or $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)dt = 1$. Donc $h(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = \theta(\xi)$

et $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

II) Formule d'inversion de Fourier.

II.A On définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)\,\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)$.

- Chaque f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
- $\left(\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)\,\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)$ converge simplement vers $\mathcal{F}(f)\,\theta(0) = \mathcal{F}(f)$.
- $\forall n\ \forall \xi \quad |f_n(\xi)| \leq |\mathcal{F}(f)|(\xi)$ et $|\mathcal{F}(f)|$ est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\,d\xi.$$

II.B Pour la même raison, puisque f est continue en 0 et bornée (car dans $\mathcal{S}$) et puisque θ est dans $\mathcal{S}$

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\theta)(t)\,dt = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)dt = f(0).$$

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = f(0)$$

$$\underline{I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt\right) d\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt\right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, d\xi\right) dt \qquad \text{(théorème de Fubini)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t}\, d\xi\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi')\, e^{-i\pi n\xi' t}\, n\, d\xi'\right) dt \qquad (\xi = n\xi')$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathcal{F}(\theta)(nt)\, n\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(u)\, du \qquad (u = nt)$$

$$\underline{I_n = J_n}$$

<u>II. D)</u> Il résulte immédiatement de A, B et C que.

(*) $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, d\xi = f(0)}$

Soit $\underline{h : t \mapsto f(x+t)}$ $\quad \mathcal{F}(h)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, e^{-2i\pi t\xi}\, dt.$

le changement de variable $u = x+t$ $\quad (t = u-x \quad dt = du)$

donne immédiatement $\underline{\mathcal{F}(h)(\xi) = e^{2i\pi\xi}\, \mathcal{F}(f)(\xi)}$

la formule (*) conduit à $\quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, e^{2i\pi\xi}\, d\xi$

Il faut néanmoins vérifier que h est bien dans $\mathcal{S}$ pour appliquer (*) à h.

Or $\forall t$ $\forall n$ $\quad \underline{t^n h(t) = (t+x-x)^n f(x+t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} x^k \underbrace{(t+x)^{n-k} f(t+x)}_{\text{bornée}}}$

et $\quad \underline{t \mapsto t^n h(t) \text{ est bien bornée}}$

II. E) Soit $f : t \mapsto e^{-|t|}$

f est continue ~~par morceaux~~ sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} t^n f(t) = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $t \mapsto t^n f(t)$ est bornée. Donc f est dans $\mathcal{S}$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-2i\pi\xi} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2i\pi\xi)t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{+(1-2i\pi\xi)t} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{(1+2i\pi\xi)} e^{-(1+2i\pi\xi)} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{1-(2i\pi\xi)} e^{(1-2i\pi\xi)} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{1+2i\pi\xi} + \frac{1}{1-2i\pi\xi} = \frac{2}{1+(2i\pi\xi)^2}$$

Or $\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$, donc $\mathcal{F}(f)$ est intégrable

On peut appliquer le résultat de la question précédente et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi\xi}}{1+(2\pi\xi)^2} d\xi = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

III. Transformée de Fourier à support compact

III. A) La démonstration de : ~~$\mathcal{F}(f)$~~ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ suit le même plan que celle de I.D.2). Les hypothèses de différentiabilité de continuité partielle sont toujours vérifiée.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} \right) \right| \leq (2\pi)^n |\xi|^n \mathcal{F}(f)(\xi)$$

et $\xi \mapsto (2\pi)^n |\xi|^n \mathcal{F}(f)(\xi)$ est à support compact, elle est donc intégrable et bornée.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus on sait déjà de $\mathcal{F}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ car f est dans $\mathcal{S}$.

Elle est dans $\mathcal{S}$ car on vient de voir que pour tout n

$x \mapsto x^n \mathcal{F}(f)(x)$ est bornée (car à support compact)

6

III. B) On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M(n+1, x, x_0)$

où $M(n+1, x, x_0) = \sup_{t \in [\min(x,x_0), \max(x,x_0)]} |f^{(n+1)}(t)|$

Or d'une part $f^{(k)}(x_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x_0 \xi} d\xi$

par dérivation sous le signe d'intégration et

d'autre part $|f^{(n+1)}(t)| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\pi|\xi|^{n+1} \cdot \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \, d(\xi)$

$|f^{(n+1)}(t)| \leq \pi^{n+1} \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} M(n+1, x, x_0) = 0$ pour tout (x, x_0) et

par conséquent $\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ avec

$f^{(n)}(x_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2i\pi\xi)^n \mathcal{F}(f) e^{2i\pi x_0 \xi} d\xi$

III. C) Si f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$ et si on choisit x_0 en dehors de ce segment alors f est nulle au voisinage de x_0, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x_0) = 0$

et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot 0 = 0$

(En fait on obtient donc un résultat plus précis : si f est dans $\mathcal{S}$ et si $\mathcal{F}(f)$ est à support compact (le $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ était sans importance et pouvait être remplacé par $[-a, a]$) alors f n'est identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert)

IV) Cas des fonctions périodiques.

IV.A.1) g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1,1[-\{0\}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (et $x \mapsto \sin \pi x$ ne s'annule pas sur $]-1,1[-\{0\}$).

Au voisinage de 0
$$f(x)-f(0) = f'(0)\,x + o(x)$$
$$\sin \pi x = \pi x + o(x)$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{\sin \pi x} = \dfrac{f'(0)}{\pi} = g(0)$ et g est bien continue en 0.

la continuité en 1 et -1 résulte de la 1-périodicité de f et de $\sin(\pi(x+1)) = -\sin \pi x$.

IV.A.2) $\forall x\neq 0$, $x\in\,]-1,1[$ $\quad g'(x) = \dfrac{f'(x)\sin \pi x - \pi(f(x)-f(0))\cos \pi x}{(\sin \pi x)^2}$

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + o(x) \qquad \sin \pi x = \pi x + o(x^2)$$

donc $f'(x)\sin\pi x = \pi f'(0)\,x + x^2 f''(0) + o(x^2)$

$$\pi\,(f(x)-f(0)) = \pi f'(0)x + \frac{\pi f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos \pi x = 1 - o(x)$$

$$\pi\,(f(x)-f(0))\cos\pi x = \pi f'(0)\,x + \frac{\pi f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

On en déduit

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g'(x) = \dfrac{f''(0)\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}$ existe, g est continue sur $]-1,1[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[-\{0\}$

Par conséquent g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$g'(0) = \frac{f''(0)\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}.$$

En utilisant la périodicité de f et $\sin\pi(x+1) = -\sin \pi x$. ~~[illegible]~~ on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,1]$

IV B $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i0\pi x} dx = 1$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2ik\pi x} dx = \left[\frac{1}{2ik\pi} e^{2ik\pi x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$ si $k \neq 0$

donc par linéarité $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_n(x)\,dx = 1$

IV.C $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - \{0\}$ $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (e^{2i\pi x})^k$ avec $e^{i2\pi x} \neq 1$

$\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - \{0\}$ $S_n(x) = e^{-2i\pi n x} \dfrac{1 - e^{2i\pi(2n+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}}$

$$= e^{-2i\pi n x} \frac{e^{i\pi(2n+1)x}}{e^{i\pi x}} \times \left(\frac{-2i \sin\pi(2n+1)x}{-2i \sin \pi x}\right)$$

$\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - \{0\}$ $S_n(x) = \dfrac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$

IV.D $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2i\pi k x} dx = \sum_{k'=-n}^{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{2ik'\pi x} dx$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, S_n(x)\,dx = f(0) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x) - f(0)) S_n(x)\,dx.$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

(car $(f(x) - f(0)) S_n(x) = g(x) \sin((2n+1)\pi x)$ $\begin{cases} \text{pour } x \neq 0 \text{ c'est la question précédente} \\ \text{pour } x = 0 \text{ c'est } 0 = 0 \end{cases}$

IV) E g est de classe C^1, on peut donc intégrer par parties

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) \sin(2n+1)x\,dx = \left[\frac{g(x)\cos((2n+1)x)}{2n+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n+1} \int_{-1/2}^{1/2} g'(x) \cos((2n+1)x)\,dx$$

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) \sin((2n+1)x)\,dx\right| \leq \frac{|g(\frac{1}{2})| + |g(-\frac{1}{2})|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} |g'(x)| \underbrace{|\cos((2n+1)x)|}_{\leq 1} dx$$

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) \sin((2n+1)x)\,dx\right| \leq \frac{|g(\frac{1}{2})| + |g(-\frac{1}{2})| + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g'(x)|\,dx}{2n+1} = \frac{C}{2n+1}$$

IV.F G_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$) (9)

$$G_t(0)=0$$

$$G'_t(x) = f''(x+t)\sin\pi x + \pi f'(x+t)\cancel{\cos\pi x} - \pi f'(\cancel{x+t})\cos\pi x + (f(x+t)-f(t))\pi^2\sin\pi x$$

donc $G'_t(0)=0$

$$G'_t(x) = \left(f''(x+t) + \pi^2(f(x+t)-f(t))\right)\sin\pi x.$$

f est ~~1~~-périodique, ainsi que f'' et elle sont continues. Elles sont donc bornées. De plus $\forall u\in\mathbb{R}$ $|\sin u|\le |u|$

Donc $\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $\forall t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $|G'_t(x)|\le(\|f''\|_\infty+\pi^2\|f\|_\infty)|x| = D|x|$

Puis $\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $|G_t(x)|=|G_t(x)-G_t(0)|\le |x| \sup\limits_{u\in[\min(0,x),\max(0,x)]} |G'_t(u)| \le Dx^2$

(D étant bien indépendant de x et t !)

IV.G par IV.D ~~et~~ IV.E) on a $\left|f(0)-\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)\right|\le \frac{C}{2n+1}$

h_t est $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique.

On a donc $\forall t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $\left|f(t)-\sum\limits_{k=-1}^{n} c_k(h_t)\cancel{e^{2i\pi kt}}\right|\le\frac{C}{2n+1}$

Or $c_k(h_t)=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+t)e^{-2i\pi kx}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}+t} f(y)\,e^{-2i\pi k(y-t)}\,dy$

$$c_k(h_t) = e^{2i\pi kt}\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}+t} f(y)e^{-2ik\pi y}\,dy = e^{2i\pi kt}c_k(f)$$

La dernière égalité résultant de la 1-périodicité de $y\mapsto f(y)e^{-2ik\pi y}$.

(On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|f(t)-\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right|=0$, c'est le théorème de la convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui n'est plus au programme.)

V) Formule d'échantillonnage de Shannon.

V.A) On sait que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme $\mathcal{F}(f)|_{[\frac{1}{2},+\infty[}=0$ on a $\mathcal{F}(f)^{(n)}(\frac{1}{2})=0$ (de même pour $\mathcal{F}(f)^{(n)}(-\frac{1}{2})$)

V.B) C'est une nouvelle fois le théorème de la limite de la dérivée.

- h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}+k, k\in\mathbb{Z}\}$
- h est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall p\in\mathbb{N}^*$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\lim\limits_{\substack{x\to k+\frac{1}{2}\\ x\neq k+\frac{1}{2}}} h^{(k)}(x)=0$ (d'après la question précédente)

donc h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

V.C) On applique la conclusion obtenue en IV.G à la fonction h.

V.D) $\forall x\in$ $f(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi\xi}d\xi$

Soit $\Sigma_n : x\mapsto\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\,e^{2i\pi kx}$

$$\forall x\quad \left|f(x)-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\Sigma_n(\xi)\right)e^{2i\pi\xi}d\xi\right|\leq\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{F}(f)-\Sigma_n\|_\infty\times 1\times d\xi$$

$$\forall x\quad \left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{2i\pi(\xi+k)}d\xi\right|\leq\|\mathcal{F}(f)-\Sigma_n\|_\infty$$

$$\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\,\psi_k\right\|_\infty\leq\|\mathcal{F}-\Sigma_n\|_\infty$$

Donc $\left(\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\,\psi_k\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

V.E)

$\forall \ell \in \mathbb{Z}^*$ $\psi(\ell)=0$ et $\psi(0)=1$.

$\forall \ell \in \mathbb{Z}$ $\psi_k(\ell)=0$ si $\ell \neq -k$ $\psi_k(-k)=1$

On en déduit $\forall j$ $f(-j)=d_j$ et finalement

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\,\psi_k .$$

VI) Transformation de Laplace

VI.A.1) Puisque les X_i sont linéairement indépendantes la fonction génératrice G_{S_n} de S_n est $\prod_{k=1}^{n} G_{X_i} = (G_{X_1})^n$

$$G_{S_n}(t) = \left(e^{\lambda(t-1)}\right)^n = e^{\lambda n(t-1)} = G_{\mathcal{P}(n\lambda)}(t).$$

La fonction génératrice caractérisant une variable aléatoire

$S_n \rightsquigarrow$ ~~$\mathcal{G}(n\lambda)$~~. $\mathcal{P}(n\lambda)$.

(L'auteur attendait peut être : $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ et X et Y sont indépendante à l'aide de la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)^k}{k!}$$)

VI.A.2) Puisque S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, on a $E(S_n) = n\lambda$ $V(S_n) = n\lambda$. L'inégalité de Bienaimé-Chebychev donne alors

$$P(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{n\lambda}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

VI A.3) $|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon = \{ S_n \geq n\lambda + n\varepsilon \} \cup \{ S_n \leq n\lambda - n\varepsilon \}$

les deux inclusions souhaitées découlent immédiatement de ce résultat.

VI A.4) Si $0 \leq x < \lambda$ on peut écrire $x = \lambda - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

donc $P(S_n \leq nx) = P(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \leq P(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n \leq nx) = 0$

De même si $x > k$ $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n > nx) = 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n \leq nx) = 1$.

VI.B) Puisque S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$

$$P(S_n \leq nx) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}.$$

le résultat demandé en découle

VI. C.1) $$\sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} f(t)}_{S_n(t)} \, dt$$

D'après VI.B) et le résultat admis (S_n) converge simplement vers f_x : $y \mapsto f(y)$ si $y \in [0, x[$

$x \mapsto \dfrac{f(x)}{2}$

$y \mapsto 0$ si $y > x$

et f_x est continue par morceaux. $\forall n \ \forall t \quad |S_n(t)| \leq |f(t)| \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} = |f(t)|$.

Or f est à support compact donc intégrable. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient ainsi le résultat demandé

VI.C2 Si $\mathcal{L}(f) = 0$ alors $G : x \mapsto \int_0^x f(y)\,dy$ est nulle.

Puisque f est continue G est de classe $\mathcal{C}^1$ et $G' = f$. Donc

$f = 0$ et $\mathcal{L}$ est injective sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$