ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2015 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices électroniques est interdite.

⋆ ⋆ ⋆

Le problème est consacré à l'étude de la répartition de certains ensembles d'entiers dans les suites arithmétiques. Les deux premières parties sont consacrées à des ensembles arbitraires, et les deux suivantes à l'ensemble des nombres premiers.

Les parties I, II et III sont indépendantes. La partie IV utilise les résultats de la partie III.

Préambule

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $|X|$. Si E et F sont deux ensembles quelconques, on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.

On dira qu'une suite finie $a_1, \dots, a_r$ d'entiers relatifs est en progression arithmétique si l'on peut trouver deux entiers a et b tels que $a_i = a + bi$ pour $i = 1, \dots, r$. L'entier b est alors la *raison* de cette progression arithmétique.

I

Si E et F sont deux ensembles finis, la *discrépance* de F par rapport à E est l'entier positif

$$\Delta(E,F) = \Big| |F \cap E| - |E \setminus F| \Big|.$$

1. Soit X un ensemble fini de cardinal d. Soit $\mathbb{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X.
   (a) Calculer le cardinal de $\mathbb{P}(X)$.

(b) Calculer en fonction de d les sommes

$$\sum_{k=0}^{d} k\binom{d}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{d} k(k-1)\binom{d}{k}.$$

(c) Calculer les sommes

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathbb{P}(X)} |Y| \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\mathbb{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathbb{P}(X)} |Y|^2.$$

(d) Montrer l'égalité

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathbb{P}(X)} \Delta(X,Y)^2 = d.$$

2. Si N et q sont deux entiers strictement positifs, et si a est un entier relatif, on note $S_{q,a}(N)$ l'ensemble des éléments de $\{1,\ldots,N\}$ qui sont congrus à a modulo q. On note $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(\{1,\ldots,N\})$.

(a) Montrer que pour tous entiers $1 \leq a \leq q \leq N$, le cardinal de $S_{q,a}(N)$ est strictement inférieur à $1+\frac{N}{q}$.

(b) Montrer que pour tous entiers $1 \leq t \leq N$, on a

$$\frac{1}{|\mathbb{P}(N)|}\sum_{Y\in\mathbb{P}(N)}\sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{q} \Delta(S_{q,a}(N),Y)^2 \leq 2Nt.$$

3. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier N strictement positif, il existe un sous-ensemble Y de $\{1,\ldots,N\}$ vérifiant, pour tout q compris entre 1 et N et tout a entre 1 et q, l'inégalité

$$\Delta(S_{q,a}(N),Y) \leq CN^{2/3}.$$

On pourra pour cela choisir judicieusement la valeur de t dans l'inégalité ci-dessus.

II

Dans cette partie, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui sont nulles en dehors d'un ensemble fini. Si c est un élément de $\mathcal{E}$, on note $\widehat{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction

$$\widehat{c} : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)e^{2i\pi nx}.$$

On pourra remarquer que, par définition de l'espace $\mathcal{E}$, le membre de droite de l'expression ci-dessus est une somme finie.

1. (a) Soit $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, montrer les égalités

$$\int_0^1 \widehat{c}(x) e^{-2i\pi nx}\, dx = c(n) \quad \text{et} \quad \int_0^1 |\widehat{c}(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c(n)|^2.$$

(b) Soient c et d deux éléments de $\mathcal{E}$. On définit leur produit de convolution $c * d : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$(c * d)(n) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2,\, p+q=n} c(p)d(q).$$

Montrer que $c * d$ est bien défini et appartient à $\mathcal{E}$.

(c) Avec les notations de la question précédente, montrer l'égalité $\widehat{c * d} = \widehat{c}\,\widehat{d}$.

Dans ce qui suit, soit N un entier strictement positif et soit Y un sous-ensemble de $\{1, \ldots, N\}$ de cardinal r. On note $\eta = \frac{r}{N}$.

On note $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\chi(n) = 1 - \eta$ si $n \in Y$, $\chi(n) = -\eta$ si $n \in \{1, \ldots, N\} \setminus Y$ et $\chi(n) = 0$ sinon.

2. Montrer l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) = 0.$$

3. Si E est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, on note $V(E)$ la quantité

$$V(E) = |E \cap Y| - \eta |E \cap \{1, \ldots, N\}|.$$

Soit $c_{-E} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique de $-E$, qui vaut 1 en n si $-n \in E$, et 0 sinon. Montrer l'égalité

$$V(E) = (\chi * c_{-E})(0).$$

Soit s un entier positif inférieur ou égal à N. On s'autorisera plus tard à choisir s de manière adaptée en fonction de N.

4. Soit q un entier strictement positif. On note c_q la fonction caractéristique de l'ensemble

$$E_q = \{n \in \mathbb{Z}, q \,\text{divise}\, n \,\text{et}\, |n| \leq sq\}.$$

(a) Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe deux entiers distincts $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et un entier relatif $h \in \mathbb{Z}$, tels que

$$|\alpha_i - \alpha_j - h| \leq \frac{1}{n}.$$

(b) Soit α un nombre réel, et soit Q un nombre entier strictement positif. Montrer qu'il existe un entier $q \in \{1, \ldots, Q\}$ et un entier h tels que

$$|q\alpha - h| \leq \frac{1}{Q}.$$

(c) Soit α un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de N et de s, et un entier $q \leq 8s$ tel que

$$|\widehat{c_q}(\alpha)| \geq Ks.$$

5. Soit p un entier. On note $E_{q,p}$ l'ensemble

$$E_{q,p} = p + E_q = \{n \in \mathbb{Z},\, n - p \in E_q\}.$$

(a) En utilisant la question II.1.(a), montrer l'inégalité

$$\sum_{1 \leq q \leq 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 \geq K^2 \eta(1-\eta) N s^2.$$

(b) En choisissant judicieusement s, montrer que l'on peut trouver une constante $K' > 0$ indépendante de N et de Y, et un sous-ensemble Z d'éléments de $\{1, \ldots, N\}$ en progression arithmétique tels que

$$\Big| |Y \cap Z| - \eta |Z| \Big| \geq K' \sqrt{\eta(1-\eta)} N^{1/4}.$$

III

1. Soit $\omega : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega(u) = \frac{1}{u}$ si $1 \leq u \leq 2$ et

$$\omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \int_1^{u-1} \omega(t) dt$$

pour $u > 2$.

(a) Montrer que la formule ci-dessus définit bien une fonction continue sur $[1, \infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2, \infty[$.

(b) Montrer que pour tout réel $u \geq 1$, on a $1/u \leq \omega(u) \leq 1$.

(c) Montrer que $u\, \omega'(u) = -\int_{u-1}^{u} \omega'(t) dt$ pour tout réel $u > 3$.

(d) Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a

$$\lim_{u \to \infty} u^k\, \omega'(u) = 0.$$

(e) Montrer que ω admet une limite finie en $+\infty$. Dans la suite du problème, on notera L cette limite.

(f) Soit $\widetilde{\omega}$ la fonction $u \mapsto \omega(u) - L$. Montrer l'égalité

$$\forall\, u > 3,\; u\, \widetilde{\omega}(u) = -\int_{u-1}^{\infty} \widetilde{\omega}(t) dt.$$

(g) Montrer que pour tout réel $C \geq 1$, il existe deux nombres réels $u, v > C$ tels que $\omega(u) < L$ et $\omega(v) > L$.

Dans la suite du problème, si x est un nombre réel strictement positif, on notera $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On admettra dans la suite le théorème suivant, dit *théorème des nombres premiers*.

Théorème III.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\, x > 1,\ \left|\pi(x) - \frac{x}{\ln x}\right| \leq C\frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Dans la suite, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

2. Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leq b$, on ait
$$\left|\pi(b) - \pi(a) - \sum_{a \leq n \leq b} \frac{1}{\ln n}\right| \leq K\frac{b}{(\ln b)^2}.$$

3. Soit $f :]1, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction, et soient $1 < a \leq b$ deux nombres réels. Soit a^- le plus grand entier strictement inférieur à a, et soit b^0 le plus grand entier inférieur ou égal à b, c'est-à-dire la partie entière de b.

   (a) Montrer l'égalité
   $$\sum_{p\in\mathcal{P},\, a\leq p\leq b} f(p) = \sum_{a\leq n\leq b} \pi(n)[f(n) - f(n+1)] - \pi(a^-)f(1 + a^-) + \pi(b^0)f(1 + b^0).$$

   (b) Montrer l'égalité
   $$\sum_{a\leq n\leq b} \frac{f(n)}{\ln n} = \sum_{a\leq n\leq b} \psi(n)[f(n) - f(n + 1)] - \pi(a^-)f(1 + a^-) + \psi(b^0)f(1 + b^0),$$
   où l'on définit, pour tout réel x entre a et b,
   $$\psi(x) = \pi(a^-) + \sum_{a\leq k\leq x} \frac{1}{\ln k}.$$

   (c) En déduire l'inégalité
   $$\left|\sum_{p\in\mathcal{P},\, a\leq p\leq b} f(p) - \sum_{a\leq n\leq b} \frac{f(n)}{\ln n}\right| \leq K\frac{b\, f(1 + b^0)}{(\ln b)^2} + K \sum_{a\leq n\leq b} \frac{n}{(\ln n)^2}|f(n+1) - f(n)|,$$
   où K est la constante introduite dans la question 2.

   (d) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^k}$ converge et que pour tout réel $a > 1$, on a
   $$\sum_{n\geq a} \frac{1}{n(\ln n)^k} \leq \frac{1}{(k-1)(\ln a)^{k-1}} + \frac{1}{a(\ln a)^k}.$$

(e) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tout réels $1 < a < b$, on ait

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\, a\le p\le b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \le \frac{1}{2(\ln a)^2} + \frac{K'}{(\ln a)^3}$$

4. Montrer l'existence d'une constante $K'' > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$, on ait

$$\sum_{2\le n\le x} \frac{1}{(\ln n)^2} \le K'' \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Si x et y sont deux réels strictement positifs, on notera $\Phi(x, y)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et x au sens large dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y. En particulier, pour tout réel $y > 0$, on a $\Phi(1, y) = 1$.

5. Pour tous réels $1 < y < x$ tels que $\sqrt{x} < y$, montrer l'inégalité

$$|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \le 1$$

et en déduire qu'il existe une constante $D_1 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $\sqrt{x} \le y < x$, on ait

$$|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln x}| \le D_1\Big(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y}\Big).$$

6. Soient x et y deux réels strictement positifs. Pour tout $y' \ge y$, montrer l'égalité

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y') + \sum_{p\in\mathcal{P},\, y\le p<y'} \Phi\Big(\frac{x}{p}, p\Big).$$

7. (a) Pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \le y < \sqrt{x}$, montrer l'égalité

$$1 + \int_y^{\sqrt{x}} \frac{\ln x\, dt}{t\,(\ln t)^2(\ln(x)/\ln(t) - 1)} = \frac{\ln x}{\ln y}\omega\Big(\frac{\ln x}{\ln y}\Big).$$

(b) Montrer l'existence d'une constante $D_2 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel y satisfaisant $x^{1/3} \le y < \sqrt{x}$, on ait

$$\Big|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y}\omega\Big(\frac{\ln x}{\ln y}\Big)\Big| \le D_2 \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On appliquera la question III.6 avec $y' = \sqrt{x}$.

(c) Montrer l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tous réels $1 < y < \sqrt{x}$, on ait

$$\Big|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y}\omega\Big(\frac{\ln x}{\ln y}\Big)\Big| \le D \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On pourra pour cela raisonner par récurrence sur l'unique entier $n \ge 2$ tel que $x^{\frac{1}{n+1}} \le y < x^{\frac{1}{n}}$.

IV

Dans cette partie, si q est un entier strictement supérieur à 1, on note $\varphi(q)$ le nombre d'entiers $n \in \{1, \dots, q\}$ qui sont premiers à q.

1. (a) Soit $y > 2$ un nombre réel. On note $q(y)$ le produit des nombres premiers strictement inférieurs à y. Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\Phi(x, y) \sim x \frac{\varphi(q(y))}{q(y)}.$$

   (b) En utilisant la partie précédente, en déduire

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\varphi(q(y))}{q(y)} \ln y = L,$$

   où L est le nombre réel défini dans la question III.1.(e).

   (c) En utilisant les questions 3 et 4 de la partie précédente, montrer par ailleurs que quand y tend vers $+\infty$, on a

$$\ln q(y) \sim y.$$

2. Soit $y > 2$ un nombre réel. Afin d'alléger les notations, on notera $q = q(y)$. Soient m et n deux entiers strictement positifs. On considère la matrice rectangulaire $M(m, n, q)$ de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indice (i, j) est

$$M(m, n, q)_{ij} = i + (m + j)q$$

pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, et l'on suppose $n < q$.

   (a) Montrer que le nombre de lignes de $M(m, n, q)$ contenant au moins un nombre premier est inférieur ou égal à $\Phi(n, y)$.

   (b) Soit N le nombre de nombres premiers apparaissant comme coefficients de la matrice $M(m, n, q)$. Montrer l'égalité

$$N = \sum_{1 \leq j \leq m} \Big[\pi(n + (m + j)q) - \pi((m + j)q)\Big].$$

   (c) On note M_s la quantité

$$M_s = \frac{1}{m} N,$$

   et M_a la quantité

$$M_a = \frac{1}{\Phi(n, y)} N.$$

   Supposant $N > 0$, montrer l'égalité

$$M_s \Big(\frac{n}{\ln(mq)}\Big)^{-1} \times M_a^{-1} \frac{mq}{\varphi(q) \ln(mq)} = \frac{\Phi(n, y)}{n} \frac{q}{\varphi(q)}.$$

3. En appliquant les résultats ci-dessus à des valeurs de m et n bien choisies en fonction de y, montrer que l'un des deux énoncés suivants est vrai :
   — Soit $\alpha_0 > 0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre réel $\alpha > \alpha_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $x > 1$ tels que
   $$(\ln x)(\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x)) > \lambda(\ln x)^\alpha.$$
   — Soit $\beta_0 > 0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre entier $\beta > \beta_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $q > 1$ tels qu'il existe une suite d'entiers $a_1, \ldots, a_{q^\beta}$ premiers à q, en progression arithmétique de raison q, avec $q^\beta < a_1 < 2q^{\beta+1}$, pour laquelle le nombre de nombres premiers parmi les a_i soit strictement inférieur à
   $$\lambda^{-1} \frac{q^\beta}{\ln(q^\beta)\varphi(q)}.$$

   On commencera par estimer le membre de droite dans l'égalité de la question précédente, et on appliquera la question 1.(g) de la partie 3.

⋆ ⋆
⋆