Exercice 1

$f : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall p \in \mathbb{N}$ $f^{(p)} = f$

la majoration de Taylor à l'ordre n, si n est un entier, donne

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq R_n(f,x)$$

où

$$R_n(f,x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [\min(0,x), \max(0,x)]} |f^{(n+1)}(t)|$$

$$R_n(f,x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\max(0,x)}$$

or par croissance comparée $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to +\infty} R_n(f,x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Exercice 2

1)_ On prouve par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (en fait $u_n \in]0, 1[$ pour $n \geq 1$)

$x \mapsto (1 - \cos x)$ est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. (car cos y est décroissante)

Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone. Elle est bornée et par conséquent convergente.

Sa limite ℓ appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$

Puisque $f : x \mapsto 1 - \cos x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient $f(\ell) = \ell$ (car $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit $g(x) = 1 - \cos x - x = f(x) - x$. g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ $g'(x) = \sin x - 1 < 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Donc g est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ $g(x) < x$

(et en particulier $g(x) \neq x$). (Remarquer qu'on prouve aussi que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante). Finalement $\ell = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - 0}{u_n - 0} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0} = f'(0)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Or $f'(0) = 0$. Donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert

$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 3 $A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (X-16)(X-1)(X-4)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. Il existe P dans $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\forall X \in M_3(\mathbb{R})$ $\exists!\, Y$ $X = PYP^{-1}$ $(Y = P^{-1}XP)$. et $X^2 = A \Leftrightarrow PY^2P^{-1} = PDP^{-1}$ car $\Phi : M \mapsto PMP^{-1}$ est un morphisme pour la multiplication. C'est même un morphisme d'algèbre.

$$\underline{X^2 = A \Leftrightarrow Y^2 = D \Leftrightarrow (Y^2 = D \text{ et } YD = DY = Y^3)}$$

Or $YD = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ (une matrice qui commute avec une matrice diagonale à coefficients distincts si et seulement si c'est une matrice diagonale)

Donc $X^2 = A \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \pm 4 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$

L'équation $X^2 = A$ possède donc les 8 solutions $\underline{X = P\begin{pmatrix} \varepsilon_1 4 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 2 \end{pmatrix}P^{-1}}$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{1, -1\}^3$.

Rq. le polynôme $\underline{L = \alpha \frac{(X-1)(X-4)}{(16-1)(16-4)} + \beta \frac{(X-16)(X-4)}{(1-16)(1-4)} + \gamma \frac{(X-16)(X-1)}{(4-16)(4-1)}}$ est tel que

$L(16) = \alpha$ $L(1) = \beta$ $L(4) = \gamma$ et donc $L(D) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Φ est un morphisme d'algèbre donc $\Phi(L(D)) = L(\Phi(D))$. Soit $\underline{X = PYP^{-1} = PL(D)P^{-1} = L(PDP^{-1}) = L(A)}$

les huit solutions sont donc $X = 4\varepsilon_1 \frac{1}{180}(A-I)(A-4I) + \varepsilon_2 \frac{1}{45}(A-16I)(A-4I) - 2\varepsilon_3 \frac{1}{36}(A-16I)(A-I)$

Exercice 4

1) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -I_n \\ -A & XI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & 0 \\ -A & XI_n - \frac{1}{X}A \end{vmatrix}$ (effectuer $C_{n+i} = C_{n+i} + \frac{1}{X} C_i$ pour i croissant de 1 à n)

$\chi_B(X) = X^n \det(XI_n - \frac{1}{X}A) = \det(X^2 I_n - A) = \underline{\chi_A(X^2) = \chi_B(X)}$

2) $Z = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ ssi $B\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} V = \lambda U \\ AU = \lambda V = \lambda^2 U \end{cases}$

$\underline{\lambda \in Sp(B) \iff \lambda^2 \in Sp(A)}$ et $\underline{E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} U \\ \lambda U \end{pmatrix}, U \in E_{\lambda^2}(A) \right\}}$ $E_\lambda(B)$ est isomorphe à $E_{\lambda^2}(A)$ par l'application linéaire $U \mapsto \begin{pmatrix} U \\ \lambda U \end{pmatrix}$. En particulier $\underline{\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)}$

3) Autorisons nous la notation $E_0(A)$ même si 0 n'est pas valeur propre. On a alors $E_0(A) = \{0\}$ et ce qui suit reste cohérent. (de même pour $E_0(B)$)

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in Sp(B)} E_\lambda(B) = \dim E_0(B) + 2 \sum_{\mu \in Sp(A) - \{0\}} \dim E_\mu(A) = 2\left(\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) \right) - \dim E_0(A).$$

B diagonalisable $\iff 2n = \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim E_\lambda(B) \iff 2\left(\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) \right) - \dim E_0(A) = 2n$

Or $\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) \leq n$ donc. B diagonalisable $\iff \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) = n$ et $\dim E_0(A) = 0$

<u>B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible</u>

Exercice 5 On définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \sin x$ si $x \in [0,\sqrt{n}[$, $f_n(x)=0$ si $x \geq n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue par morceaux.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n > x^2$ $f_n(x) = \exp n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) = \exp(-x^2+o(1)) . \sin x$

Donc $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n > x^2}} f_n(x) = e^{-x^2}\sin x$, et par conséquent $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^2}\sin x = f(x)}$

f est continue par morceaux et $\underline{(f_n)_{n\geq 0} \text{ converge simplement vers } f}$.

- Soit $(x, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^*$

+ Si $x \in [0,\sqrt{n}[$ $|f_n(x)| \leq \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp(-x^2)$

car $\forall u \in]-1,+\infty[$ $\ln(1+u) \leq u$.

+ Si $x \in [\sqrt{n},+\infty[$ $|f_n(x)| = 0 \leq \exp(-x^2)$

Donc en définissant $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$ qui est continue par morceaux et intégrable car $\underline{\varphi(x) \underset{+\infty}{=} e^{-x^2}}$ on aura $\underline{\forall (x,n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^* \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)}$

- On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \sin x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \sin x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin x\,dx}$$

Exercice 6

$\forall x \in]-1,1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{n^2+x^2} = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}} = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k$ car $\left|-\frac{x^2}{n^2}\right|<1$

Posons $u_{n,k} = \dfrac{1}{n^2}\left(-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^k = \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{n^{2k+2}}$, et fixons x dans $]-1,1[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge vers $\dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}} = \dfrac{1}{n^2-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{n,k}|$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{n,k}| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-x^2}$ converge car : $\dfrac{1}{n^2-x^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge car $2>1$

et $\forall n \geq 1 \quad \dfrac{1}{n^2} \geq 0$.

Donc $(u_{n,k})$ est sommable, donc on peut écrire (et toutes les sommes ont un sens)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k+2}}\right)x^{2k}$$

$\forall x \in]-1,1[\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec

$a_n = 0$ si n est impair

$a_n = (-1)^k\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{2k+2}} = (-1)^k\zeta(2k+2)$ si $n=2k$ est pair.

Exercice 7 : 1) $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue, décroissante et possède une limite en $+\infty$.

la série $\underline{\sum_{n\geq 2} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \right) \text{ est donc convergente}}$. Donc $\lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} = C$ existe.

Or $\alpha_n = -\left(\int_1^n \frac{dx}{x} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) + 1$ Donc $\alpha = -C + 1 = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$ existe.

2) $\alpha_n - \alpha = \lim_{N\to+\infty} \alpha_n - \alpha_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N-1} \alpha_k - \alpha_{k+1} = \underline{\sum_{k=n}^{+\infty} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_n - \alpha}$.

Or $\alpha_k - \alpha_{k+1} = -\frac{1}{k+1} - \ln k + \ln(k+1) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1}$

$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \underline{\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = \alpha_k - \alpha_{k+1}}$

Donc $\underline{\alpha_k - \alpha_{k+1} \sim \frac{1}{2k^2}}$, $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k^2}$ est une série à termes <u>positifs</u> qui <u>converge</u>.

On peut donc appliquer le <u>théorème de sommation des équivalents</u> et $\underline{\alpha_n - \alpha \sim \sum_{k=n}^{} \frac{1}{2k^2} = R_n}$

<u>Or</u> $\forall N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N^2} = \left(\sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{2t^2}\,dt \right) + \frac{1}{2N^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2k^2} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{2t^2} \right) + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2n^2}$

Par passage à la limite $(N \to +\infty)$ on aura.

$\underline{\frac{1}{2n} \leq R_n \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}}$, donc $R_n \sim \frac{1}{2n}$ et finalement $\underline{\alpha_n - \alpha \sim \frac{1}{2n}}$.

Exercice 8 : Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $n \geq 2$.

Alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \underline{v_n - w_n = u_n}$ avec

$\underline{v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}$ et $\underline{w_n = v_n - u_n} = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \underline{\frac{1}{2n^{2\alpha}} \sim w_n}$

- $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 2}$ tend vers 0 et décroissant donc $\underline{\sum_{n\geq 2} v_n \text{ converge (règle de Leibniz)}}$

- $\underline{w_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}}$ or $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est une série à termes positifs donc

$\underline{\sum_{n\geq 2} w_n \text{ et } \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2n^{2\alpha}} \text{ sont de même nature.}}$

D'après la règle de Riemann $\underline{\sum_{n\geq 2} w_n \text{ converge ssi}}$ $2\alpha > 1$, soit $\underline{\alpha > \frac{1}{2}}$

- Or puisque $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge ssi $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge.

Finalement $\underline{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ converge ssi } \alpha > \frac{1}{2}}$

Exercice 9 Supposons que $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe. Alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sin((n+1)\alpha)$

Or $\sin(n+1)\alpha = (\cos\alpha)\sin(n\alpha) + \sin\alpha\cos n\alpha$. Mais α est dans $]0,\pi[$ donc $\sin\alpha \neq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\cos n\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\sin(n+1)\alpha - \cos\alpha \sin n\alpha\right)$ et, par conséquent

$\ell' = \lim_{n\to+\infty} \cos n\alpha$ existe

Puis $L = \ell + i\ell' = \lim_{n\to+\infty} e^{in\alpha}$ existe $\left(e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\right)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $e^{i(n+1)\alpha} = e^{i\alpha} e^{in\alpha}$, donc par passage à la limite

$$L = e^{i\alpha} L$$

$$(1 - e^{i\alpha}) L = 0$$

Mais $e^{i\alpha} \neq 1$ donc $L = 0$.

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$ $|e^{in\alpha}| = 1$, donc par passage à la limite $|L| = 1$.

Il y a contradiction, donc $\lim_{n\to+\infty} \sin n\alpha$ n'existe pas.

Exercice 10 : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 (n+1)t^n\,dt = 1$ Donc I_n est une moyenne pondérée de f sur $[0,1]$

$\sup_{t\in[0,1]} (n+1)t^n = (n+1)$ et cette borne est atteinte en 1. On peut penser que les poids se concentrent sur 1. Ce qui est confirmé par $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\rho (n+1)t^n = \lim_{n\to+\infty} \rho^{n+1} = 0$ si $\rho \in [0,1[$.

La limite probable de $(I_n)_{n\geq 0}$ où $I_n = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt$ est donc $f(1)$.

Ce raisonnement justifie la démonstration qui suit, qui n'est donc pas sortie d'un chapeau.

Soit $I_n = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt$. $I_n - f(1) = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt - f(1) = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt - \int_0^1 (n+1)t^n f(1)\,dt$

$$|I_n - f(1)| = \left|\int_0^1 (n+1)t^n (f(t)-f(1))\,dt\right| \leq \int_0^1 (n+1)t^n\,|f(t)-f(1)|\,dt.$$

f est continue en 1, car continue sur $[0,1]$. De plus f est bornée, soit $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \eta > 0$ $\forall t \in [1-\eta, 1]$ $|f(t) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons un tel η

$$|I_n - f(1)| \leq \int_0^{1-\eta} (n+1)t^n |f(t)-f(1)|\,dt + \int_{1-\eta}^1 (n+1)|f(t)-f(1)|\,dt \leq \int_0^{1-\eta} (n+1)t^n (2\|f\|_\infty)\,dt + \int_{1-\eta}^1 (n+1)t^n \frac{\varepsilon}{2}\,dt$$

$$|I_n - f(1)| \leq 2\|f\|_\infty (1-\eta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\eta}^1 (n+1)t^n\,dt \leq 2\|f\|_\infty (1-\eta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 (n+1)t^n\,dt \leq 2\|f\|_\infty (1-\eta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 2\|f\|_\infty (1-\eta)^{n+1} = 0$ Donc il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$ $2\|f\|_\infty (1-\eta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

En conclusion

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $|I_n - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci veut exactement dire $\lim_{n\to+\infty} I_n = f(1)$

Exercice 11. $I(x) = \int_{\mathbb{R}^{*+}} g(x,t)\,dt$ avec $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \frac{\sin tx}{t} e^{-t} \end{array}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $|g(x,t)| \leq \frac{t|x|}{t} e^{-t} = |x|e^{-t}$ et $t \mapsto |x|e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x,\cdot)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \cos tx \; e^{-t}$ est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*+}$.
  - $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue
  - $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux,
  - $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*+}$ $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t} = \varphi(t)$.

  φ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$

Donc I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$ $I'(x) = \int_{\mathbb{R}^{*+}} \cos(xt)e^{-t} = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^{*+}} e^{ixt}e^{-t}\,dt\right)$

$$I'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Or $I(0)=0$, on en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$ $I(x) = \arctan x$.

Exercice 12 : (1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 0 = f_0(0)$ donc f_0 est continue en 0. f_0 est continue sur $]0,1]$ d'après les théorèmes classique donc f est continue sur $[0,1]$

(2) $f_0|_{]0,1]} = \tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ $\tilde{f}'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \in]0,1]$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(f_0|_{]0,1]}\right)' = \lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{f}'(x) = 0$ existe

Donc f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $f_0(0) = 0$

—

On suppose f_0 de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0,1]$ avec $f_0^{(k)}(0) = 0$, $f_0^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \in]0,1]$

où P_k est un polynôme..

Alors

- $f_0^{(k)}$ est continue sur $[0,1]$
- $f_0^{(k)}|_{]0,1]} = \tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ avec $\tilde{f}'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$

  où P_{k+1} est un polynôme
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{f}'(x) = 0$ existe.

Donc $f_0^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, c'est à dire f_0 est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[0,1]$

et $f_0^{(k+1)}(0) = 0$ $f_0^{(k+1)}(x) = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($P_k \in \mathbb{R}[x]$).

On prouve donc par récurrence que f_0 est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $f_0^{(n)}(0) = 0$ pour tout n